NOMBRES PREMIERS

I) Définitions et propriétés

1) Définitions

- Tout entier n supérieur ou égal à 2 admet au moins deux diviseurs positifs, qui sont 1 et n lui-même.
- Les autres diviseurs éventuels sont appelés les *diviseurs positifs stricts* de n.
- On dit qu'un entier **positif** n est un *nombre premier* s'il n'a pas de diviseur positif strict, ou encore s'il a exactement deux diviseurs positifs, qui sont donc 1 et n lui-même.
  L'entier positif n est un nombre premier si et seulement si $D(n) = \{1 ; n\}$.
- Un entier négatif n est premier si et seulement si l'entier positif $-n$ est premier.
- Les dix plus petits nombres premiers sont :

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.
- Un nombre entier qui n'est pas un nombre premier s'appelle un *nombre composé*.

- Tout nombre composé peut donc s'écrire, éventuellement de plusieurs façons, $n = a \times b$, avec $2 \leq a \leq b < n$.

- **Attention !** l'écriture $n = a \times b$ n'assure pas que n n'est pas premier si on ne précise pas la condition sur a et b, car on peut aussi écrire $n = 1 \times n$.

E1 : Soit un entier $n \geq 3$. On pose $a = n^2 - 2n - 3$. Existe-t-il des valeurs de n telles que a soit premier ?

E2 : a) Montrer que tout nombre premier p strictement supérieur à 5 est de la forme $6k + 1$ ou $6k + 5$, avec k entier naturel.

b) Montrer que si, de plus, $p + 2$ est premier, alors p n'est que de l'une des deux formes ci-dessus.

c) Montrer qu'il n'est pas possible que les entiers p, $p + 2$ et $p + 4$ soient premiers simultanément.

E3 : Montrer que la somme de trois entiers positifs impairs consécutifs n'est jamais un nombre premier.

E4 : a) Développer $\left(a^2 + 2b^2\right)^2$.

b) Déterminer les entiers strictement positifs a et b tels que $a^4 + 4b^4$ est un nombre premier.

E5 : En étudiant la congruence modulo 3, déterminer les nombres premiers p tels que $2^p + p^2$ est premier.

2) Propriétés

- **P1** : Le plus petit diviseur positif (autre que 1) d'un entier strictement positif est un nombre premier.
- **T1 :** Il existe une infinité de nombres premiers.

- L'ensemble des nombres premiers est noté **P** et la suite (p_n) des nombres premiers a pour premiers termes :

  $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$...

E6 : Soit n un nombre premier. Déterminer dans quel(s) cas l'entier $n^2 + 1$ est premier.

E7 : a) Développer l'expression $(x-1)(x^2 + x + 1)$, où x est un réel quelconque.

b) Montrer sans calculs inutiles que le nombre entier $2^{108} - 1$ n'est pas un nombre premier.

c) Déterminer son plus petit diviseur premier.

II) Décomposition (nombres entiers positifs)

T2 : Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 s'écrit (*se décompose*), et ceci de façon unique, en un produit de nombres premiers (on dit *facteurs* premiers).

- **Attention !** l'existence et l'unicité de la décomposition sont deux propriétés distinctes, qui habituellement se démontrent séparément.
- Si l'entier est lui-même premier, il ne se *décompose* pas en produit de nombres premiers, mais on choisit de globaliser l'énoncé de la propriété pour ne pas l'alourdir…
- Tout nombre entier positif peut donc s'écrire $n = \prod_{i \in \mathbf{N}^*} p_i^{\alpha_i} = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots$, où p_i sont les nombres premiers de **P** (avec $p_1 = 2$; $p_2 = 3$; $p_3 = 5...$) et les α_i des entiers positifs ou nuls, qui seront nuls lorsque p_i ne fera pas partie de la décomposition de l'entier n.

  - **Présentation possible** :

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Donc $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

On a donc : $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$

et $\alpha_i = 0$ pour tout $i \geq 4$

E8 : Déterminer par la méthode précédente (calculs en colonne) la décomposition en produit de facteurs premiers de 189, puis de 450.

E9 : Décomposer en produit de nombres premiers les entiers suivants :

720 ; 63×47 ; 2309 ; 12 936 et $24^5 \times 38^3$.

E10 : En remarquant que 999 999 = $10^6 - 1$, déterminer la décomposition en facteurs premiers de 999 999.

E11 : a) Décomposer 26 460 en produit de facteurs premiers.
b) Déterminer le plus petit entier strictement positif qui, lorsqu'il est multiplié par 26 460, donne le cube d'un nombre entier.

III) Détermination de primalité

(c'est-à-dire le fait d'être un nombre premier)

- Par définition, un nombre entier positif n est un nombre premier lorsqu'il n'est divisible par aucun nombre entier strictement compris entre 1 et n.

- **P2** : Il suffit de diviser n par les nombres premiers compris entre 1 et n.

- **P3** : Il suffit de diviser n par les nombres premiers compris entre 1 et $\sqrt{n}$.

- **Application** : Montrons que 89 est premier.
  $\sqrt{89} \approx 9{,}4$ donc il suffit de tenter de diviser 89 par les nombres premiers à partir de 2 jusqu'à 7. Or 89 n'est divisible ni par 2, 3, 5 ou 7, donc 89 est premier.

E12 : Déterminer si les nombres 283 et 481 sont premiers ou composés.

E13 : Déterminer, en expliquant la méthode employée, le nombre premier qui suit le nombre 5039.

E14 : Déterminer la fraction irréductible égale à

$$\frac{31122}{100947}.$$

IV) Quelques utilisations de la décomposition

1) Déterminer si un entier en divise un autre

- **P4** : Soit $n = \prod_{i \in \mathbf{N}^*} p_i^{\alpha_i}$ et $d = \prod_{i \in \mathbf{N}^*} p_i^{\beta_i}$. L'entier d divise l'entier n si et seulement si, pour tout entier i, $\beta_i \le \alpha_i$

- **Exemple** : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $24 = 2^3 \times 3$
  donc 24 divise 360.

E15 : Déterminer, grâce à la méthode de décomposition en produit de facteurs premiers, s'il existe des valeurs de l'entier n pour que, parmi les couples suivants, l'un des nombres soit un diviseur de l'autre :

a) $p = 680$ et $q = 2550 \times 2^n$

b) $r = 22264$ et $s = 1012 \times 11^n$

c) $t = 144 \times 7^n$ et $u = 1029 \times 2^n$

2) Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs d'un nombre entier

- L'écriture $n = \prod_{i \in \mathbf{N}^*} p_i^{\alpha_i}$ permet d'obtenir tous les diviseurs de n puisqu'ils ont une écriture identique avec, pour chaque p_i, un exposant inférieur ou égal.

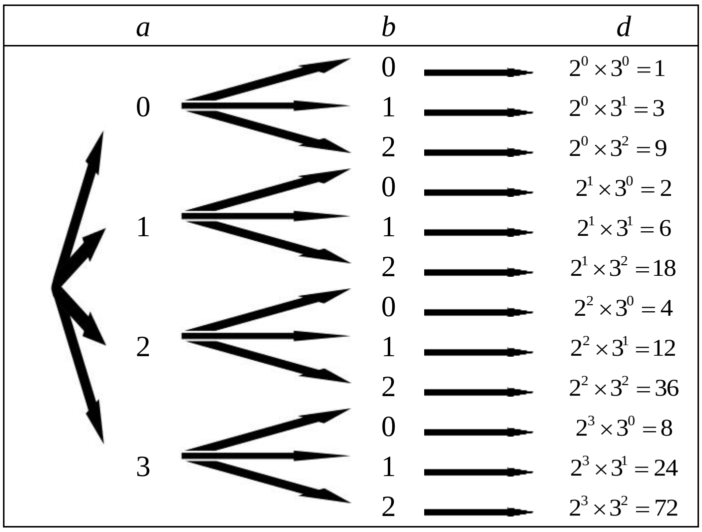
- **T3** : Le nombre de diviseurs positifs de n est alors :
$$ND(n) = \prod_{i \in \mathbf{N}^*} (\alpha_i + 1)$$

- **Exemple** : $72 = 2^3 \times 3^2$. Les diviseurs de 72 s'écrivent $2^a \times 3^b$, avec $0 \le a \le 3$ et $0 \le b \le 2$.
  Il y a $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$ diviseurs.

Liste des diviseurs grâce à un tableau à double entrée :

	$a = 0$	$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$
$b = 0$	$2^0 \times 3^0 = 1$	$2^1 \times 3^0 = 2$	$2^2 \times 3^0 = 4$	$2^3 \times 3^0 = 8$
$b = 1$	$2^0 \times 3^1 = 3$	$2^1 \times 3^1 = 6$	$2^2 \times 3^1 = 12$	$2^3 \times 3^1 = 24$
$b = 2$	$2^0 \times 3^2 = 9$	$2^1 \times 3^2 = 18$	$2^2 \times 3^2 = 36$	$2^3 \times 3^2 = 72$

Liste des diviseurs grâce à un « arbre » :



Donc $D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$.

E16 : Montrer que le nombre de diviseurs d'un entier n strictement positif est impair si et seulement si n est un carré parfait.

E17 : Déterminer l'entier naturel a pour que l'entier $N = 25 \times 6^a$ ait 48 diviseurs.

E18 : a) Déterminer les écritures possibles des entiers ayant exactement 4 diviseurs.

b) Déterminer le plus petit d'entre eux.

E19 : a) Déterminer l'entier naturel a pour que l'entier $n = 2^a \times 3^{2a+2}$ ait 21 diviseurs.

b) Déterminer l'entier naturel b pour que l'entier $N = 9 \times 10^b$ ait 27 diviseurs.

E20 : Déterminer l'entier positif n ayant cinq diviseurs positifs et tel que $n-16$ est le produit de deux nombres premiers.

E21 : Déterminer les entiers positifs n n'ayant pour diviseurs premiers que 2 et 3 et tels que le nombre de diviseurs de n^2 est le triple de celui de n.

E22 : Soit p et q deux nombres premiers consécutifs supérieurs ou égaux à 3 tels que $p < q$.

a) Montrer que le nombre $N = \dfrac{p+q}{2}$ est un entier qui divise $p + q$ et qui vérifie $p < N < q$.

b) En déduire que la somme $p + q$ est le produit d'au moins trois nombres premiers (éventuellement égaux).

3) Crible d'Ératosthène

(Ératosthène de Cyrène : grec d'Alexandrie, III^e siècle av. J.-C.)

- Cette méthode permet d'obtenir la liste de tous les nombres premiers inférieurs à un nombre donné.
- On passe successivement « *au crible* » tous les entiers depuis 2 en barrant les multiples de 2.
  Le plus petit nombre non barré est un nombre premier, puis on barre ses multiples et on recommence.

E23 : Barrer les multiples par des traits ou des couleurs selon la légende personnelle choisie.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Légende
× 2
× 3
× 5
× 7

V) Exercices complémentaires

E24 : Preuve de Thomas Joannes Stieltjes *(néerlandais, 1856-1894)* **de l'infinitude des nombres premiers** *(démonstration par l'absurde)*

Soit $P = \{p_1 ; p_2 ; ... ; p_n\}$ et $N = \prod_{i=1}^{n} p_i$.

On écrit $N = a \times b$ avec a et b entier strictement supérieurs à 1. Pour tout i de 1 à n, montrer que p_i ne divise pas $a + b$ et conclure.

E25 : Preuve de Pierre de Fermat *(français, ~1601-1665)* **de l'infinitude de nombres premiers**

On définit les <u>*nombres de Fermat*</u> par :

Pour tout entier n positif ou nul, $F_n = 2^{\left(2^n\right)} + 1$.

a) Montrer que $F_{n+1} = 2 + \prod_{k=0}^{n} F_k$.

b) Montrer que, pour tous entiers n et k,

$$F_{n+k} - 1 = \left(F_n - 1\right)^{\left(2^k\right)} .$$

c) Montrer alors que, pour tout entier $k > 0$,

$$F_{n+k} \equiv 2\left[F_n\right] .$$

d) Montrer ensuite que deux nombres de Fermat distincts sont toujours premiers entre eux.

e) Montrer enfin qu'il existe une infinité de nombres premiers.

E26 : Preuve de l'infinitude de nombres premiers de la forme 4*n* + 3

Soit p un nombre premier et soit

$$q = \left(2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times ... \times p\right) - 1 .$$

a) Préciser le reste de la division euclidienne de q par 4.

b) Montrer que q n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à p.

c) Montrer que q admet au moins un diviseur strictement supérieur à p qui est congru à 3 modulo 4.

d) Conclure

E27 : Preuve qu'on peut trouver deux nombres premiers consécutifs aussi éloignés l'un de l'autre que l'on veut

On rappelle que, pour n entier strictement positif, n ! (factoriel n) est le produit des entiers entre 1 et n.

a) Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et k un entier entre 2 et n. Montrer que $n ! + k$ n'est pas premier.

b) Conclure.

E28 : Somme des diviseurs positifs d'un entier

a) Rappeler la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison r.

b) Soit p et q deux nombres premiers distincts.

On définit l'entier N par : $N = p^2 q$. Montrer que la somme des diviseurs de N est $S(N) = \dfrac{p^3 - 1}{p - 1} \times \dfrac{q^2 - 1}{q - 1}$.

c) En déduire la somme des diviseurs de l'entier 2299.

d) Déterminer un nombre divisible par exactement deux nombres premiers, ayant six diviseurs, et dont la somme des diviseurs est 39.

Remarque : Pour information, la somme des diviseurs de $\prod_{i \in \mathbb{N}^*} p_i^{\alpha_i}$ est $\prod_{i \in \mathbb{N}^*} \dfrac{p_i^{\alpha_i + 1} - 1}{p_i - 1}$