POLYNÔMES

I) Définition et vocabulaire

- Soit x un réel et soit un entier $n \geq 1$, x^n est appelé une puissance. Si a est un réel non nul, ax^n est un monôme. Une somme de monômes est un polynôme.
- L'écriture d'un polynôme est $\sum_{k=0}^n a_k x^k$, où a_n est un réel non nul avec, pour cette notation, la convention $x^0 = 1$. L'entier n , plus grand exposant des monômes, s'appelle le degré de $P(x)$, et se note $d^\circ P$.
- Le polynôme nul (tel que, pour tout x , $P(x) = 0$) est supposé ne pas avoir de degré. Le réel a_k s'appelle le coefficient d'indice k du polynôme $P(x)$.

II) Opérations

- a) **Définitions naturelles** d'une somme, d'une différence et d'un produit de polynômes (en utilisant la distributivité de $\times$ par rapport à $+$).
- b) **Formules sur le degré** (polynômes non nuls)
- **P1** : d'un produit : $d^\circ(P \times Q) = d^\circ P + d^\circ Q$
 - **P2** : d'une somme : $d^\circ(P + Q) \leq \sup(d^\circ P; d^\circ Q)$

III) Polynôme nul, égalité de deux polynômes

- a) **P3 : Théorème de base** (admis) : Le polynôme nul (c'est-à-dire tel que $P(x) = 0$ pour tout x) est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.
- b) **P4 : Application** : deux polynômes sont égaux (c'est-à-dire tels que $P(x) = Q(x)$ pour tout x) si et seulement s'ils ont même degré et mêmes coefficients relatifs à chaque degré.
- c) **Utilisation** : la propriété précédente est la base de la méthode d'identification de deux polynômes.

IV) Divisibilité et factorisation

a) P5 : Division euclidienne de polynômes

Soit $A(x)$ et $B(x)$ deux polynômes, alors il existe un unique couple $(Q(x); R(x))$ tels que, pour tout x ,

$$A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x), \text{ avec } d^\circ R < d^\circ B$$

Pour déterminer $Q(x)$ et $R(x)$, on peut utiliser l'identification, ou encore le principe de la division des décimaux vue en Primaire.

b) Divisibilité de polynômes

- Le réel r est appelé une racine (ou un zéro) de $P(x)$ si et seulement si r est une solution de $P(x) = 0$, c'est-à-dire $P(r) = 0$.
- Le polynôme $P(x)$ est divisible par le polynôme $Q(x)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R(x)$ tel que $P(x) = Q(x) \times R(x)$. On est donc alors dans le cas où le polynôme $S(x)$ du a) est nul.

c) Identités remarquables :

$$\text{P6 : } x^n - r^n = (x - r) \sum_{k=0}^{n-1} r^k x^{n-k-1}$$

Cas particuliers : $x^2 - r^2 = (x - r)(x + r)$

$$x^3 - r^3 = (x - r)(x^2 + rx + r^2)$$

$$x^4 - r^4 = (x - r)(x^3 + rx^2 + r^2x + r^3) \quad \dots$$

d) **P7 : Théorème** : Soit $P(x)$ un polynôme et r un réel. Alors $P(x) - P(r)$ est divisible par $x - r$

e) Conséquences :

- **P8** : r est une racine de $P(x)$ si et seulement si $P(x)$ est divisible par $x - r$.
- **P9** : Si r et s sont deux réels distincts racines de $P(x)$, alors $P(x)$ est divisible par $(x - r)(x - s)$.
- **P10** : Un polynôme de degré n a au plus n racines.
- **P11** : Si on a trouvé n racines distinctes d'un polynôme $P(x)$ de degré n , alors :

$$P(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n).$$

- **Attention !** si les racines d'un polynôme $P(x)$ sont aussi des racines d'un polynôme $Q(x)$, cela ne veut pas dire que $P(x)$ divise $Q(x)$.

Deux contre-exemples :

- a) $P(x) = (x - 1)^3$ et $Q(x) = (x - 1)^2(x - 2)$
 b) $P(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$ et $Q(x) = (x - 1)(x - 2)$

V) Exercices

E1 : Montrer qu'il existe un réel a , à déterminer, tel que $P(x) = 4x^3 - 27x - 27$ s'écrive aussi $(2x + 3)^2(x - a)$

E2 : Montrer qu'il existe trois réels a, b et c , tels que, pour tout x pour lequel l'expression a un sens,

$$\frac{1 - x - x^2}{(1 - 2x)(1 - x^2)} = \frac{a}{1 - 2x} + \frac{b}{1 - x} + \frac{c}{1 + x}.$$

E3 : Montrer que $P(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$ est le carré d'un polynôme, à déterminer.

E4 : Effectuer la division euclidienne de

$$x^3 + 6x^2 - 4x + 3 \text{ par } x^2 + 2x - 1$$

E5 : a) Déterminer les réels p et q pour que

$$P(x) = x^4 + px^2 + q \text{ soit divisible par}$$

$$Q(x) = x^2 - 5x + 6.$$

b) Déterminer alors les racines de $P(x)$.

E6 : Soit n un entier strictement positif. Montrer que $(x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$ est divisible par $(x - 1)(x - 2)$.

E7 : Factoriser $2x^3 - 5x^2 + 2x + 21$ sachant qu'il a une racine commune avec $2x^3 + 5x^2 - 13x - 24$.

E8 : Soit $P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 14x^2 + x + 2$. Déterminer ses racines sachant que ce polynôme admet deux racines entières entre -2 et 2 .

E9 : Soit t un réel fixé. On pose, pour tout réel x ,

$$P(x) = x^3 - (3 + t)x^2 + (2 + 3t)x - 2t.$$

Montrer que t est une racine de $P(x)$.

Déterminer alors les autres racines et factoriser $P(x)$.

E10 : Déterminer $P(x)$, de degré 3, admettant $-1; 0,5$ et 2 comme racines et tel que : $P(-0,5) = 5$.

E11 : Les restes respectifs de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 1, x - 2$ et $x - 3$ sont $3; 7$ et 13 . Déterminer le reste de la division de $P(x)$ par $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.