

EXERCICES SUR LES POLYNÔMES

1 : Déterminer un polynôme à coefficients **entiers** dont une des racines est : $u = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

2 : Si on développe $(2x - 1)^{1995}$ selon les puissances décroissantes de x , on trouve :

$$ax^{1995} + bx^{1994} + cx^{1993} + \dots$$

Déterminer la valeur de $a + b + c + \dots$

3 : Soit a, b et c trois réels distincts deux à deux. On pose :

$$P(x) = a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Exprimer $P(x)$ sous la forme développée la plus simple possible.

4 : Soit a, b et c trois réels distincts deux à deux et non nuls. On pose :

$$P(x) = \frac{x(x-b)(x-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{x(x-c)(x-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{x(x-a)(x-b)}{c(c-a)(c-b)} - 1$$

Exprimer $P(x)$ sous forme factorisée.

5 : Soit $P(x) = 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6$.

a) Montrer que si r est une racine de $P(x)$, alors $\frac{1}{r}$ aussi.

b) Pour tout x réel non nul, on pose $y = x + \frac{1}{x}$. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c , à déterminer, tels que, pour tout x non nul : $\frac{P(x)}{x^2} = ay^2 + by + c$.

c) En déduire les racines de $P(x)$.

6 : Déterminer les réels a et b pour que $(x-1)^2$ divise $x^{n+1} + ax^n + b$ pour tout n entier strictement positif.

7 : Déterminer toutes les fonctions polynômes f définies sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x :

$$f'(x) \times f''(x) = f(2x).$$

8 : Déterminer le polynôme $P(x)$ de degré 4 (qui possède donc 4 racines, réelles ou complexes), satisfaisant aux conditions suivantes :

- le coefficient de x^4 est 1
- $P(x)$ est divisible par $x^2 - 2x + 5$
- la somme des quatre racines de $P(x)$ vaut 1
- le produit des quatre racines de $P(x)$ vaut -30 .

9 : a) Déterminer le polynôme $P(x)$ de degré 4 satisfaisant aux conditions suivantes :

- pour tout réel x non nul, $P(x) = x^4 P\left(-\frac{1}{x}\right)$

- $P(x)$ est divisible par $x - 1$
- le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x^2 + 1$ est $2x + 1$.

a) Montrer que $P(x)$ est divisible par $x + 1$.

b) Déterminer toutes les racines de $P(x)$

10 : Montrer que, pour tout entier $n > 0$

$$P(x) = (x^{n+1} - 1)(x^n - 1)$$

est divisible par $(x-1)^2 (x+1)$.

11 : Déterminer les réels a et b pour que $(x-1)^2$ divise $x^{n+1} + ax^n + b$ pour tout n entier strictement positif.

12 : Déterminer les racines des polynômes

$$P(x) = 12x^4 + 92x^3 + 175x^2 + 66x - 45$$

$$\text{et } Q(x) = 18x^4 - 57x^3 - 76x^2 + 67x - 12$$

sachant qu'ils en ont deux en commun.

13 : Déterminer la plus petite valeur du réel k telle que : pour tout triplet $(a ; b ; c)$ de réels,

$$(a + b + c)^2 \leq k(a^2 + b^2 + c^2).$$

14 : Déterminer tous les polynômes $P(x)$ de degré 4, satisfaisant aux conditions suivantes :

- $P(x)$ est le carré d'un polynôme
- le polynôme $P(x) - P(-x)$ est égal à $4x(x^2 - 2)$
- le polynôme $x^2 P(x^5) - (x^8 - 1) P(3x)$ est divisible par le polynôme $x - 1$.

15 : Déterminer à quelle condition sur l'entier n le polynôme $P(x) = x^2 + x + 1$ divise le polynôme

$$Q(x) = (x+1)^n - x^n - 1.$$

16 : a) Déterminer un polynôme $P(x)$ de degré 5 tel que :

- $P(x) + 8$ soit divisible par $(x+1)^3$
- $P(x) - 8$ soit divisible par $(x-1)^3$

b) Terminer la factorisation de $P(x) + 8$ et de $P(x) - 8$.

17 : Les restes respectifs de la division euclidienne d'un polynôme $P(x)$ par $x-1$, $x-2$ et $x-3$ sont 3 ; 7 et 13.

Déterminer le reste de la division de $P(x)$ par $(x-1)(x-2)(x-3)$.

18 : Soit $P(x)$ un polynôme.

Montrer que $P(x) - x$ divise $P(P(x)) - x$.