

PROBABILITÉS

Rappels – Probabilités conditionnelles

I) Rappels et compléments sur les ensembles

1) Vocabulaire et notations

- Soit E un ensemble.
On appelle sous-ensemble de E tout ensemble A vérifiant : Tout élément de A appartient à E .
On note $A \subset E$ et on lit « A inclus dans E »
- Si A et B sont deux sous-ensembles de E , alors on note $A \cap B$ (lire « A inter B ») l'intersection de A et de B définie par : « Pour tout x de E , x appartient à $A \cap B$ si et seulement si x appartient à A **et** aussi à B ».
- On note $A \cup B$ (lire « A union B ») la réunion de A et de B définie par : « Pour tout x de E , x appartient à $A \cup B$ si et seulement si x appartient à A **ou** à B »

Remarque : Le « ou » employé ici est dit inclusif (l'intersection de A et B est incluse dans leur réunion).

- Si A est un sous-ensemble de E , on note $\bar{A}$ (on dit « A barre ») le complémentaire de A dans E (lire ainsi), définie par : « Pour tout x de E , x **appartient à** $\bar{A}$ si et seulement si x **n'appartient pas** à A »

2) Quelques propriétés

- **P1 :** $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$
- **P2 :** $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$
- **P3 :** Les deux lois de Morgan : (A et B dans E).

$$A \cap B = \overline{A \cup \bar{B}} \quad \text{et} \quad A \cup B = \overline{A \cap \bar{B}}$$

II) Ensembles finis

1) Définition et propriété

- **D1 :** Un ensemble E , non vide (avec au moins un élément), est dit fini si et seulement si on peut associer chaque élément de E à chaque élément d'une partie de $\mathbb{N}$ de la forme $\{1; 2; 3; \dots; n-1; n\}$.
- L'entier n est appelé le cardinal de E , et noté $\text{card}(E)$.

- **P4 :** Propriété de base sur les cardinaux (admise) :
Soit A et B deux ensembles finis. Si A et B sont disjoints (i.e. d'intersection vide), alors le cardinal de leur réunion est égal à la somme de leurs cardinaux.
 $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$

- **Remarque :** Lorsque deux ensembles A et B , inclus dans E , sont disjoints, et que leur réunion est E , on dit que A et B forment une partition de E . Cette définition est généralisable à plus de deux sous-ensembles.

2) Conséquences

- **P5 :** Si $A \subset B$, alors $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$.
- **P6 :** Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$, n ensembles deux à deux disjoints, alors le cardinal de la réunion est égal à la somme des cardinaux : $\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{card}(A_i)$.

- **P7 :** Si A est un sous-ensemble de E , alors :

$$\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$$

- **P8 :** $((A \subset B) \text{ et } (\text{card}(A) = \text{card}(B))) \Rightarrow (A = B)$
- **P9 (Généralisation de la propriété de base) :**
Soit A et B deux ensembles quelconques, alors on a :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

3) Vocabulaire probabiliste

- **D2 :** Une expérience aléatoire ou épreuve est une expérience dont on ne peut prévoir *a priori* le résultat.
 - Une éventualité est chaque résultat de l'épreuve.
 - L'univers est l'ensemble de toutes les éventualités.
 - Un événement est un sous-ensemble de l'univers.
 - L'événement impossible est l'événement qui ne contient aucune éventualité.
 - Deux événements A et B sont dits incompatibles s'ils n'ont pas d'élément commun ($A \cap B = \emptyset$).
 - Deux événements A et B sont dits contraires dans Ω quand $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.
On dit alors que B est l'événement contraire de A , et on note $B = \bar{A}$. On a aussi $A = \bar{B}$.

III) Loi de probabilité

1) Définition

- **D3 :** Soit Ω un univers fini de cardinal n , entier strictement positif, tel que $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.
Une loi de probabilité p sur Ω est une fonction qui, à toute éventualité e_i de Ω , associe un réel positif p_i tel que $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$. On dit que p_i est la probabilité de e_i associée à la loi p .
- On note $p_i = p(\{e_i\})$. La probabilité d'un événement A , notée $p(A)$, est égale à la somme des probabilités des éventualités qui constituent A .

2) Propriétés

- Soit Ω l'univers d'une épreuve donnée et p une loi de probabilité sur Ω . Alors :
 - **P10 :** $p(\emptyset) = 0$ et $p(\Omega) = 1$.
 - **P11 :** Soit A et B deux événements,
Si $A \subset B$, alors $p(A) \leq p(B)$.
 - **P12 :** Pour tout événement A de Ω , $0 \leq p(A) \leq 1$.
 - **P13 :** Pour tout événement A de Ω , $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
 - **P14 :** Si A et B sont deux événements incompatibles de l'univers Ω , $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
 - **P15 (Généralisation) :** Soit (A_i) , i variant de 1 à n , n événements deux à deux incompatibles ; alors on a :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n p(A_i).$$

- **P16 (à comparer à P9) :** Si A et B sont deux événements quelconques de l'univers Ω ,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

3) Équiprobabilité

- **D4** : Soit $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et p une loi de probabilité sur Ω . On dit qu'il y a équiprobabilité pour p lorsque la probabilité de chaque éventualité est la même, c'est-à-dire si : $p(e_1) = p(e_2) = \dots = p(e_n)$.

On dit aussi que p est une loi de probabilité uniforme ou encore une loi équirépartie.

- **P17** : Soit Ω un univers de n éventualités et p une loi d'équiprobabilité sur Ω . La probabilité de chaque éventualité est égale à $\frac{1}{n} = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$.

- La probabilité d'un événement A est donc :

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{"nombre de cas favorables"}}{\text{"nombre de cas possibles"}}$$

IV) Variable aléatoire

1) Définitions

- **D5** : Une variable aléatoire sur l'univers Ω est une fonction X , qui à toute éventualité de Ω , associe un **nombre réel**.
- **Exemple** : On jette un dé à six faces, numérotées de 1 à 6, dans une situation d'équiprobabilité. L'univers est alors $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
La probabilité de chaque éventualité est égale à $\frac{1}{6}$.
- On considère alors le jeu suivant : Si on obtient un nombre pair, on gagne 10 Euros, si on obtient la face 1 ou la face 3, on gagne 20 Euros, et enfin, si on obtient la face 5, on perd 40 Euros.
- L'image de Ω par X est noté $X(\Omega) = \{-40; 10; 20\}$. On définit alors une loi de probabilité sur $X(\Omega)$ telle que : $p(X = -40) = p(\{5\}) = 1/6$,
 $p(X = 10) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = 1/2$
et $p(X = 20) = p(\{1\}) + p(\{3\}) = 1/3$.

Remarque : On représente en général la loi de probabilité de la variable aléatoire X par un tableau en notant x_i les valeurs que peut prendre la variable aléatoire et les probabilités de ces valeurs :

Valeurs x_i de X	X_1	X_2	...	x_k
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_k

Exemple :

x_i	-40	10	20
$p_i = p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

2) Vocabulaire et propriétés

- **D6** : Soit Ω un univers, p une loi de probabilité définie sur Ω et X une variable aléatoire. On définit :
➤ l'espérance mathématique

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p(X = x_i) \times x_i = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

➤ la variance : $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$

➤ l'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : $E(X)$ est à rapprocher en Statistiques de la notion de moyenne pondérée $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i x_i$.

Exemple : On a : $E(X) = \frac{1}{6} \times (-40) + \frac{1}{2} \times 10 + \frac{1}{3} \times 20 = 5$.

On peut donc « espérer » gagner 5 Euros en moyenne à chaque lancer. Dans un jeu avec une variable aléatoire, l'espérance est le gain algébrique moyen.

- **D7** : Un jeu est dit équitable lorsque l'espérance mathématique est nulle. Il est gagnant quand l'espérance est positive, et perdant sinon.
- **P18 (Pour information)** : La variance peut être calculée aussi grâce à la formule (dite de Koenig) :

$$V(X) = \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 \right) - (E(X))^2$$

Exemple :

$$V(X) = \frac{1}{6} \times (-40)^2 + \frac{1}{2} \times 10^2 + \frac{1}{3} \times 20^2 - 5^2 = 425$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{425} \approx 20,62$$

- **P19** : a et λ étant des réels quelconques, on a :
 $E(X + a) = E(X) + a$ et $E(\lambda X) = \lambda E(X)$
 $V(X + a) = V(X)$ et $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$
 $\sigma(X + a) = \sigma(X)$ et $\sigma(\lambda X) = |\lambda| \sigma(X)$
- Si X et Y sont deux variables aléatoires sur le même univers Ω , alors $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

E1 : Dans une tombola, on dispose de cent enveloppes : cinq enveloppes contiennent 20 €, quinze enveloppes contiennent 5 € et les autres sont vides. Une personne prend une enveloppe au hasard. Le gain du joueur est une variable aléatoire notée X .

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X . Calculer l'espérance de gain du joueur, ainsi que l'écart-type.
- 2) On suppose maintenant que le joueur donne 2 € pour prendre une enveloppe. On appelle Y le gain algébrique du joueur.
 - a) Établir la relation entre X et Y . En déduire l'espérance de Y puis son écart-type.
 - b) Qui ce jeu favorise-t-il : l'organisateur ou le joueur ? Quel devrait être le prix d'une enveloppe pour que le jeu soit équitable ?
- 3) Dans une autre tombola, à 2 € l'enveloppe, on procède de même, mais avec cent enveloppes dont cinq contiennent 40 €, quinze contiennent 10 €, les autres étant vides. On appelle Z le gain algébrique du joueur dans cette tombola.
 - a) Calculer l'espérance et l'écart-type de Z .
 - b) Quel devrait être alors le prix d'une enveloppe pour que le jeu soit équitable ?

V) Probabilités conditionnelles

1) Représentations d'épreuve à deux caractères

- **Exemple** : Dans un lycée, 45 % des élèves sont des filles ; parmi les filles, 30 % sont des internes. Parmi les garçons, 60 % sont internes. On choisit au hasard une fiche d'un élève dans le fichier de tous les élèves et on note le résultat obtenu qui peut être : fille-externe, fille-interne, garçon-externe, garçon-interne. On appelle I : « l'élève est interne » et F : « l'élève est une fille ». L'univers est l'ensemble des élèves du lycée. On munit Ω de la loi équirépartie. On peut représenter la situation par un tableau à double entrée (avec ligne et colonne marginales) ou par un arbre.
- **Questions qui seront posées dans ces exercices** :
Quelle est la probabilité de choisir une fille ?
de choisir un garçon interne ? de choisir un externe ?
de choisir un externe sachant que c'est un garçon ?
de choisir une fille sachant qu'elle est externe ?...

E2 : Les joueurs Arthur et Béatrice font un tournoi. Le premier qui gagne est celui qui a deux victoires consécutives, ou qui obtient trois victoires en tout.

- Indiquer, sous forme d'un arbre, toutes les configurations possibles du tournoi.
- Sachant qu'ils ont chacun la même probabilité de gagner à la première partie, et que chaque gagnant d'une partie à une probabilité de 0,6 de gagner la suivante, conjecturer la probabilité que Béatrice gagne au bout de deux parties.

2) Probabilité conditionnelle

- **D8** : Soit A un événement de probabilité non nulle d'un univers Ω relatif à une expérience aléatoire. On définit sur Ω une nouvelle probabilité, notée p_A , en posant,

$$\text{pour tout événement } B : p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

p_A est appelée probabilité conditionnelle sachant que A est réalisé.

Remarque : On peut vérifier que l'on a bien :

$$p_A(\emptyset) = 0, \quad p_A(\Omega) = 1, \quad p_A(B) \in [0; 1].$$

On admettra que p_A définit sur Ω une probabilité.

- **P20** : $p_A(\bar{B}) = 1 - p_A(B)$
- **P21** : Pour tous événements B_1 et B_2 :
$$p_A(B_1 \cup B_2) = p_A(B_1) + p_A(B_2) - p_A(B_1 \cap B_2).$$

3) Théorème des probabilités totales

- **D9** : Une famille d'événements $B_1, B_2, \dots, B_n$ d'un même univers Ω constitue une partition de Ω si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :
 - aucun de ces événements n'est impossible
 - ces événements sont deux à deux incompatibles
 - leur réunion est l'univers Ω

Exemple : Soit A un événement non vide et distinct de Ω alors $(A; \bar{A})$ est une partition de Ω .

- **P22** : Étant donnés des événements $B_1, B_2, \dots, B_n$, de probabilité non nulle, constituant une partition de l'univers Ω , alors on a : pour tout événement A non impossible :

$$p(A) = p(A \cap B_1) + \dots + p(A \cap B_n)$$

que l'on peut aussi écrire :

$$p(A) = p(B_1) \times p_{B_1}(A) + \dots + p(B_n) \times p_{B_n}(A).$$

Remarque : Dans le cas $n = 2$, on a :

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) =$$

$$p(B) \times p_B(A) + p(\bar{B}) \times p_{\bar{B}}(A) \text{ et}$$

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$$

$$(\text{car } A \cap B = B \cap A)$$

Ces formules permettent d'exprimer $p_A(B)$ en fonction de $p(A)$, $p(B)$ et des probabilités conditionnelles de A selon B et $\bar{B}$ (dite formule de réciprocity conditionnelle).

E3 : Une urne contient cinq boules rouges et trois boules blanches. On tire successivement et sans remise deux boules parmi celles-ci.

- Traduire l'épreuve grâce à un arbre pondéré, dans lequel on notera A l'événement : « tirer une rouge en premier » et B : « tirer une rouge en second ».
- Déterminer grâce à cet arbre la probabilité de tirer deux boules rouges.
- Donner la probabilité que la seconde boule soit rouge.
- La deuxième boule étant rouge, quelle est la probabilité que la première soit rouge aussi ?

E4 : Au tennis, un joueur a droit à deux services.

S'il passe le premier, le jeu continue ; si le premier service est raté, il sert une deuxième fois ; si ce deuxième service passe, le jeu continue ; s'il rate à nouveau le service, on dit que le joueur a fait une « double faute », et le point est perdu.

On a calculé qu'un joueur réussit son premier service avec une probabilité de 0,6 et son deuxième avec une probabilité de 0,95.

On notera respectivement S_1 , S_2 et G les événements : « passer le premier service », « passer le deuxième service » et « gagner le point »

- Calculer sa probabilité de faire une double faute.
- Si ce joueur passe son premier service, on a calculé qu'il gagne le point avec une probabilité de 0,75. S'il passe son deuxième service, il gagne le point avec une probabilité de 0,5. Calculer sa probabilité de gagner le point.

E5 : Un sac de toile contient vingt pièces de 1 € et vingt pièces de 2 €. Un sac de cuir contient vingt pièces de 1 € et trente pièces de 2 €.

On choisit un sac au hasard, puis une pièce au hasard dans ce sac. On tire une pièce de 1 € d'un des deux sacs. Quelle est la probabilité qu'elle soit tirée du sac de cuir ?

4) Événements indépendants

- **D10** : Deux événements A et B sont dits indépendants pour la probabilité p sur Ω si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

- **P23** : Les deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si $p(A) = p_B(A)$ ou encore $p(B) = p_A(B)$.
- **Remarque** : Dire que deux événements sont indépendants signifie que la réalisation de l'un n'a pas d'influence sur la réalisation de l'autre.
- **À ne pas confondre** avec « deux événements incompatibles », pour lesquels $p(A \cap B) = p(\emptyset) = 0$.
- **P24** : Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B sont indépendants, ainsi que A et $\bar{B}$, et aussi $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

E6 : On tire au hasard une carte dans un jeu normal de 32 cartes. On envisage les trois événements suivants :

A : « la carte est rouge » B : « la carte est un cœur »

C : « la carte est un roi »

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Même question pour B et C , puis pour A et C .

E7 : Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit. Il peut arriver toutefois que le système soit mis en défaut. En effet, des études statistiques ont montré que :

- la probabilité que l'alarme se déclenche et qu'il n'y ait pas eu d'incident est égale à $1/50$
- la probabilité qu'un incident survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est $1/500$
- la probabilité qu'un incident se produise est $1/100$

1) On notera : A l'événement « l'alarme se déclenche » et I l'événement « un incident se produit ».

a) Calculer la probabilité qu'un incident survienne et que l'alarme se déclenche.

b) En déduire la probabilité que l'alarme se déclenche.

2) Quelle est la probabilité que, sur une journée, le système d'alarme soit mis en défaut ?

3) L'alarme vient de se déclencher. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident ?

4) Les assureurs estiment qu'en moyenne, pour l'entreprise, le coût des anomalies est le suivant :

- 1000 € pour un incident avec l'alarme qui fonctionne
 - 3000 € pour un incident avec l'alarme qui ne fonctionne pas
 - 200 € lorsque l'alarme se déclenche par erreur
- On considère qu'il se produit au plus une anomalie par jour. Soit X la variable représentant le coût journalier des anomalies pour l'entreprise.

a) Donner la loi de probabilité de X

b) Quel est le coût journalier moyen des anomalies ?

VI) Combinaisons

1) Définition

D11 : Soit n et p deux entiers strictement positifs tels que $p \leq n$, et soit Ω , un ensemble de cardinal n .

Une combinaison de p éléments de Ω est un sous-ensemble de p éléments (distincts deux à deux) de Ω .

2) Nombre de combinaisons de p éléments

- **P25** : Le nombre de combinaisons de p éléments de Ω est l'entier $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

- **Remarque** : La formule $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ est intéressante pour des calculs littéraux avec n et p . Cependant, pour les calculs numériques, on privilégiera $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$,

ou plus simplement, la calculatrice...

- **Avec la calculatrice** : la valeur de $\binom{n}{p}$ s'obtient grâce à la formule :

3) Propriétés

- Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$:

- **P26** : $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$

- **P27** : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

- **P28** : Formule de Pascal : $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$

- **Remarque** : On peut faire des démonstrations algébriques mais aussi « ensemblistes » des propriétés **P27** et **P28**, c'est-à-dire en se plaçant sur des ensembles ayant les mêmes cardinaux.

4) Triangle de Pascal (à compléter)

- On peut représenter les $\binom{n}{p}$ pour les premières

valeurs de p et n dans un tableau appelé « triangle », car les valeurs de la partie supérieure droite sont nulles.

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

5) Formule du Binôme de Newton

- **P29** : Pour tous nombres complexes a et b et pour tout entier naturel n :

$$(a+b)^n = \binom{n}{n} a^n + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \binom{n}{0} b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ et } (a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- **Exemples** : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \dots$$

- **Remarques**

- La démonstration se fait par récurrence.
- La deuxième égalité se déduit de la première en remplaçant b par $-b$.

- Les $\binom{n}{k}$ sont appelés coefficients binomiaux.

- **P30** : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. C'est le nombre de sous-ensembles d'un ensemble contenant n éléments.

VII) Loi binomiale

1) Définitions : Soit p un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.

- **D12** : Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire ayant deux issues ; l'une appelée « succès » de probabilité p et l'autre « échec » de probabilité $q = 1 - p$.
- **D13** : Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'issue est un succès, et 0 si l'issue est un échec ; sa loi de probabilité est appelée loi de Bernoulli c'est-à-dire : $p(X=1) = p$ et $p(X=0) = q = 1 - p$.
- On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p .
- **P31** : Si une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , alors :

$$E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1-p) = pq.$$

- **D14** : Soit p un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$ et n un entier naturel non nul. Un schéma de Bernoulli (de paramètres n et p) est l'expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois de façon indépendante la même épreuve de Bernoulli de paramètre p .
- **D15** : Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus. Sa loi de probabilité est appelée loi binomiale de paramètres n et p . On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p notée : $B(n, p)$.

2) Propriétés

- **P32** : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $B(n, p)$.

- $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; n\}$.

- Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$,

$$p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p) = npq$

- **Remarques** : On a bien sûr $\sum_{k=0}^n p(X=k) = 1$.

3) Exemple : On lance un dé 10 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir un 5 exactement 3 fois ?

- **Réponse** : L'expérience aléatoire est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{6}$ (probabilité

du succès : « obtenir un 5 »).

Si on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus (le nombre de 5), alors X suit une loi

binomiale $B\left(10; \frac{1}{6}\right)$. On applique alors la formule :

$$p(X=3) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^7 \approx 0,155.$$

4) Avec la calculatrice

- Le calcul de $p(X=k)$ s'obtient grâce à la formule :

- Le calcul de $p(X \leq k)$ s'obtient grâce à la formule :

- Pour obtenir $p(X < k)$, on calcule $p(X \leq k-1)$
- Pour obtenir $p(X > k)$, on calcule $1 - p(X \leq k)$
- Pour obtenir $p(X \geq k)$, on calcule $1 - p(X \leq k-1)$

E8 : Une enquête concernant les véhicules circulant en France a montré que 12 % des véhicules ont des freins défectueux.

Parmi les véhicules ayant des freins défectueux, 20 % ont aussi un éclairage défectueux.

Parmi les véhicules ayant de bons freins, 8 % ont un éclairage défectueux.

- Montrer que la probabilité qu'un véhicule contrôlé soit en bon état (bons freins et bon éclairage) est 0,8096.
- Au cours d'un contrôle, les gendarmes arrêtent 20 véhicules. Quelle est la probabilité pour qu'il en y ait au moins trois qui ne soient pas en bon état ?

E9 : a) Un tireur vise une cible dix fois de suite avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ de la toucher.

Déterminer la probabilité que la cible soit atteinte au moins six fois ?

- Un deuxième tireur vise une cible avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ de la toucher. Combien doit-il tirer de fois afin que la cible soit atteinte au moins une fois avec une probabilité supérieure à 0,95 ?
- Un troisième tireur vise une cible deux fois de suite. Quelle est sa probabilité de la toucher sur un tir sachant que, sur les deux tirs, la probabilité que la cible soit atteinte au moins une fois est égale à 0,99 ?