PRIMITIVES

1) Définition

- **D1** : Si f est une fonction définie **<u>sur un intervalle</u>** I, on appelle *<u>primitive</u>* de f toute fonction F, dérivable sur I, et vérifiant $F' = f$.
- **Exemple :** Si f est la fonction définie sur **R** par $f(x) = 2x$, alors la fonction F définie sur **R** par $F(x) = x^2$ est **<u>une</u>** primitive de f sur **R** car F est dérivable et, pour tout réel x, $F'(x) = 2x = f(x)$.
- **Remarque :** Une primitive n'est pas unique puisque, par exemple, la fonction G définie sur **R** par $G(x) = x^2 + 1$ a aussi pour dérivée la fonction f, et est donc aussi une primitive de f sur **R**.

E1 : Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^3 \ ; \qquad f_2(x) = 3e^{2x+1}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x^2} \ ; \qquad f_4(x) = \sqrt{x}$$

2) Propriétés

- **P1** (admise) : Si f est continue sur l'intervalle I, alors f admet au moins une primitive sur I.
- **P2** *(ensemble des primitives d'une fonction continue)* :
  - Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I, alors pour tout réel k, $F + k$ est aussi une primitive de f sur I.
  - Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors il existe un réel k tel que $G = F + k$.
  - L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F + k$, où F est une primitive de f sur I et k un réel quelconque.
- **P3** *(conséquence importante)* : Si F est une primitive quelconque de f sur un intervalle contenant a et b, alors **le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie**.
- **P4** *(méthode permettant de distinguer l'une des primitives parmi toutes les primitives)* : Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $u \in I$ et $v \in$ **R**. Alors il existe une unique primitive F de f vérifiant $F(u) = v$.
- **P5** *(opérations de base sur les primitives)* : Soit f et g deux fonctions ayant pour primitives respectives F et G sur un même intervalle I et soit k un réel. Alors une primitive de $f + g$ sur I est $F + G$ et une primitive de kf sur I est kF.

E2 : Soit f la fonction définie sur **R** par :

$$f(x) = e^x - x + 2.$$

Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(0) = 2$.

E3 : Déterminer les primitives des fonctions définies par : $f_1(x) = 2x^3 - x + 1$, $x \in$ **R**,

$f_2(x) = e^x$, $x \in$ **R**, $\quad f_3(x) = 3x(x^2 - 4)$, $x \in$ **R**

$$f_4(x) = \sqrt{2x+1}, \ x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

$$f_5(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \ x \in \left]1; +\infty\right[$$

$f_6(x) = \cos 3x$, $x \in$ **R**, $\quad f_7(x) = 3e^{5x-1}$, $x \in$ **R**

$f_8(x) = 3xe^{5x^2}$, $x \in$ **R**, $\quad f_9(x) = \dfrac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^3}$, $x \in$ **R**

$$f_{10}(x) = \cos^4 x \sin x, \ x \in \mathbf{R}$$

E4 : Déterminer la primitive de la fonction f, définie sur **R** par $f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ qui s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$.

E5 : Soit la fonction g, définie sur **R** par :

$$g(x) = e^{-x} \sin x .$$

a) Montrer que g est deux fois dérivables sur **R** et que pour tout x, $g(x) = -g'(x) - \dfrac{1}{2} g''(x)$.

b) En déduire la primitive de g sur **R** qui s'annule en 0.

E6 : a) Soit la fonction f, définie sur **R** par :

$$f(x) = \left(2x^2 + 3x - 1\right)e^x .$$

On note $h(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^x$.

Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction h soit une primitive de f sur **R**.

b) Utiliser une méthode similaire pour déterminer une primitive de la fonction g, définie sur **R** par :

$$g(x) = \left(4\sin 2x - 5\cos 2x\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

E7 : Soit u la fonction définie par :

$$u(x) = x + \sqrt{1 + x^2} .$$

a) Justifier le fait que u est dérivable sur **R** et calculer sa dérivée.

b) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

c) Déterminer une relation entre f, u et u'.

d) En déduire la primitive de f qui s'annule en 1.

E8 : On pose $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

a) Montrer qu'il existe deux réels a et b, à déterminer, tels que $f(x)$ s'écrive $\dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$.

b) En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur $]1 ; +\infty[$.

c) Déterminer celle qui s'annule en 2.