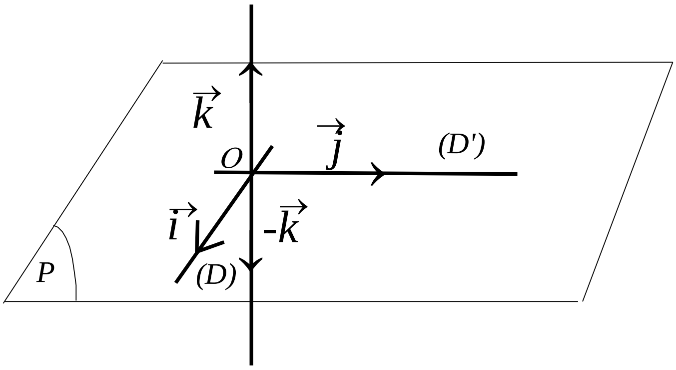
PRODUIT VECTORIEL

I) Orientation dans l'espace

- L'espace (*E*) est défini par quatre de ses points non coplanaires. On notera $(\vec{E})$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, où *M* et *N* sont deux points quelconques de (*E*).
- Cette notation sera utilisée plus loin pour les plans et les droites.
- Soit (*P*) un plan de (*E*) et $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé de (*P*). On démontre et nous admettrons qu'il existe une unique droite (*D*), perpendiculaire à (*P*) au point *O*. Cette droite est caractérisée par le fait d'être perpendiculaire simultanément à $(O\,;\vec{i})$ et à $(O\,;\vec{j})$ en *O*.
- Nous savons que $(\vec{D})$ a deux vecteurs unitaires, qui sont $\vec{k}$ et $-\vec{k}$. Chacun de ces vecteurs forme avec $(\vec{i},\vec{j})$ une <u>*base orthonormée*</u> de l'espace et est appelé vecteur unitaire <u>*normal*</u> au (ou du) plan (*P*).
- De plus, le choix de l'une des bases $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ou $(\vec{i},\vec{j},-\vec{k})$ définit l'<u>*orientation*</u> de $(\vec{E})$ et de (*E*).



- Sur le schéma, on choisit habituellement $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: c'est l'orientation donnée par <u>*l'indicateur d'Ampère*</u>, ou encore « *règle des trois doigts de la main droite* », où le pouce, l'index et le majeur peuvent symboliser respectivement les trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.
- Dans ce cas, $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée <u>directe</u> de $(\vec{E})$ et $(\vec{i},\vec{j},-\vec{k})$ est <u>indirecte</u>. $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est appelé <u>*repère orthonormé direct*</u> de (*E*).
- Étant donné un couple de vecteurs unitaires orthogonaux $(\vec{I},\vec{J})$, il existe alors un unique vecteur unitaire $\vec{K}$ tel que $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ soit une base orthonormée directe de $(\vec{E})$.
- On dit que l'orientation du plan (*P*), de repère $(O\,;\vec{I},\vec{J})$, telle que $(\vec{I},\vec{J})$ est une base directe, est l'orientation associée à $\vec{K}$ dans l'espace orienté par la base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$. Ou encore : la demi-droite $[O\,;\vec{K})$ est la <u>*demi-normale positive*</u> du plan orienté par la base directe $(\vec{I},\vec{J})$) (paradoxalement, dans l'espace, on ne peut définir l'orientation d'un plan sans « en sortir »).
- Si $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est directe, alors $(\vec{j},\vec{k},\vec{i})$ et $(\vec{k},\vec{i},\vec{j})$ le sont aussi, alors que $(\vec{i},\vec{k},\vec{j})$, $(\vec{j},\vec{i},\vec{k})$ et $(\vec{k},\vec{j},\vec{i})$ sont indirectes.

II) Produit vectoriel

1) Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{E}$, espace orienté. On appelle <u>*produit vectoriel*</u> des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le <u>vecteur</u>, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ (ou parfois $\vec{u}\times\vec{v}$), tel que :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (donc en particulier non nuls), alors :

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u}\,;\vec{v})\right)\vec{k}},$$

où, $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ étant une base orthonormée directe de l'espace, le plan vectoriel de base $(\vec{u},\vec{v})$ est orienté par la base $(\vec{i},\vec{j})$. ($\vec{k}$ est donc le vecteur unitaire de la demi-normale positive de ce plan).

- Cette définition est cohérente car elle ne dépend pas de la base $(\vec{i},\vec{j})$ choisie dans le plan vectoriel de base $(\vec{u},\vec{v})$.
- En effet, soit $(\vec{I},\vec{J})$ une autre base orthonormée de ce plan orienté :
  - si $(\vec{I},\vec{J})$ est directe, alors $\sin(\vec{u}\,;\vec{v})$ et $\vec{k}$ sont inchangés.
  - si $(\vec{I},\vec{J})$ est indirecte, alors $\sin(\vec{u}\,;\vec{v})$ et $\vec{k}$ sont tous deux changés en leurs opposés, et leur produit reste inchangé.

2) Propriétés

a) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est le vecteur nul.

b) Le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
En particulier, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux et unitaires, alors $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base orthonormée directe de $(\vec{E})$.

c) Si $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe de $\left(\vec{E}\right)$, alors :

$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}\ ,\ \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}\ ,\ \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}\ ,$$

$$\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}\ ,\ \vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}\ \text{ et }\ \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$$

d) Pour tout couple $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ de $\left(\vec{E}\right)^2$, $\boxed{\vec{v}\wedge\vec{u}=-\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)}$

e) Pour tout triplet de vecteurs $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{v}'\right)$ de $\left(\vec{E}\right)^3$, pour tout réel α,

$$\vec{u}\wedge\left(\vec{v}+\vec{v}'\right)=\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)+\left(\vec{u}\wedge\vec{v}'\right)\text{ et}$$

$$\vec{u}\wedge\left(\alpha\vec{v}\right)=\left(\alpha\vec{u}\right)\wedge\vec{v}=\alpha\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).$$

3) Expression analytique du produit vectoriel, dans une base orthonormée directe $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

Si $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$, alors :

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(yz'-y'z\right)\vec{i}+\left(zx'-z'x\right)\vec{j}+\left(xy'-x'y\right)\vec{k}}$$

ou encore $\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}z & z'\\ x & x'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}}$

4) Applications

a) On peut construire une base orthonormée directe de l'espace, en choisissant un vecteur unitaire quelconque $\vec{u}$, puis un vecteur unitaire $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$, puis le produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

b) On peut reconnaître analytiquement que deux vecteurs sont colinéaires (mais il y a plus simple !).

c) La norme de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est l'aire du parallélogramme (*ABCD*) avec *A* quelconque, *B* tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et *D* tel que $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. Cette norme est aussi deux fois l'aire du triangle (*ABD*).

d) Soit (*P*) le plan de repère $\left(A\,;\vec{u},\vec{v}\right)$. On en obtient une équation cartésienne grâce à :
M élément de (*P*) si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)=0$, car $\overrightarrow{AM}$, vecteur de (*P*), est orthogonal à $\vec{u}\wedge\vec{v}$, vecteur normal de (*P*) et réciproquement.

e) Le réel $\vec{u}\,.\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)$ est appelé *produit mixte* des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On montre que ce réel vaut aussi $\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\vec{w}$. On le note $\left(\vec{u}\,|\,\vec{v}\,|\,\vec{w}\right)$ ou encore simplement $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$.

f) Le réel positif $\left|\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\right|$ (valeur absolue du produit mixte) est le volume du parallélépipède construit sur les arêtes [*AB*], [*AC*] et [*AD*] avec *A* quelconque, $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$.

g) Le produit mixte peut aussi servir à savoir si une base orthonormée est directe ou indirecte : Une base orthonormée $\left(\vec{I},\vec{J},\vec{K}\right)$ est directe (respectivement indirecte) si et seulement si $\vec{I}\cdot\left(\vec{J}\wedge\vec{K}\right)=1$ (resp. −1).

h) Même lorsqu'on est dans le plan, il peut être utile de se « ramener » à l'espace :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un plan $\left(\vec{P}\right)$, orienté par une base orthonormée directe $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ et $\vec{v}=c\vec{i}+d\vec{j}$. Considérons ce plan dans l'espace (*E*), orienté également, et soit $\vec{k}$ le vecteur unitaire de la demi-normale positive de (*P*) dans (*E*). On a alors : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(ad-bc\right)\vec{k}$.
On retrouve alors : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires si et seulement si $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=ad-bc=0$.

On a, dans le cas général,

$$\boxed{\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\sin\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)}.$$

i) **Théorème de Lagrange**

On a : $\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\left|\sin\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)\right|$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$, d'où, grâce à la formule $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, on obtient :

$$\boxed{\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|^2+\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)^2=\left\|\vec{u}\right\|^2\times\left\|\vec{v}\right\|^2}.$$

III) Application : Distances dans l'espace

- **Définition préliminaire**
  Soit (*E*) et (*F*) deux ensembles de points.
  On appelle **distance** entre (*E*) et (*F*) la distance minimale entre un point de (*E*) et un point de (*F*).
  On la note $l=d((E),(F))$

1) Distance d'un point à une droite

Soit $\left(D\right)=\left(A\,;\vec{u}\right)$ une droite et *M* un point.
On note $l=d(M,(D))$.

a) Montrer que *l* est la distance de *M* à *H*, projeté orthogonal de *M* sur (*D*).

b) Montrer que $\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}=\overrightarrow{MH}\wedge\vec{u}$, puis calculer la norme de ce vecteur en fonction de *M*, *A* et $\vec{u}$.

c) Déterminer l'expression de la distance *l* en fonction de *M*, *H* et $\vec{u}$.

2) Distance d'un point à un plan

- Soit $\left(P\right)=\left(A\,;\vec{u},\vec{v}\right)$ un plan et *M* un point.
  On note $l=d(M,(P))$.

a) Montrer que *l* est la distance de *M* à *H*, projeté orthogonal de *M* sur (*P*).

b) Montrer que $\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right) = \left(\overrightarrow{HM}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ [produits mixtes], puis calculer la valeur absolue de ce réel en fonction de *HM* et $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

c) Déterminer l'expression de *l* en fonction de *M*, *A* et $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

d) En rapportant l'espace à un repère orthonormé direct $\left(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, (*P*) a pour équation $ax + by + cz + d = 0$ et *M* pour coordonnées x_0, y_0 et z_0. Déterminer l'expression de *l* en fonction de ces données.

3) Perpendiculaire commune

- **Définition** : Soit (*D*) et (*D'*) deux droites. (Δ) est une <u>*perpendiculaire commune*</u> à (*D*) et à (*D'*) si et seulement si (Δ) est perpendiculaire à (*D*) et à (*D'*) (donc leur est sécante). On note $(D) = (A\,; \vec{u})$ et $(D') = (B\,; \vec{v})$ (on les suppose distinctes).

a) On suppose ici (*D*) et (*D'*) parallèles. Déterminer l'ensemble des perpendiculaires communes.

b) On suppose ici (*D*) et (*D'*) sécantes en *I*. Déterminer l'ensemble des perpendiculaires communes.

c) On suppose ici (*D*) et (*D'*) non coplanaires. On note (*P*) (resp. (*P'*)) le plan contenant (*D*) (resp. (*D'*)) et parallèle à (*D'*) (resp. à (*D*)). On note aussi (*Q*) (resp. (*Q'*) le plan contenant (*D*) (resp. (*D'*)) et perpendiculaire à (*P'*) (resp. à (*P*)). Faire un dessin.

d) Montrer l'existence et l'unicité de (Δ).

e) On note respectivement *H* et *K* les points d'intersection de (Δ) avec (*D*) et (*D'*). On pose $\vec{u} = \|\vec{u}\|\,\vec{i}$ et $\vec{v} = \|\vec{v}\|\,\vec{j}$. On note *a* et *b* les deux réels tels que $\overrightarrow{AH} = a\vec{i}$ et $\overrightarrow{BK} = b\vec{j}$. $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ formant une base des plans vectoriels associés à (*P*) et à (*P'*), on définit le vecteur $\vec{k}$ unitaire tel que $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ forme une base directe de l'espace en posant $\vec{i} \cdot \vec{j} = \cos\theta$ et $\vec{i} \wedge \vec{j} = (\sin\theta)\vec{k}$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\vec{i}$ *et* $\overrightarrow{AB}.\vec{j}$ en fonction de *a*, *b* et cos θ, puis déterminer *a* et *b* en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\sin\theta$.

f) Prouver la formule dite du <u>*double produit vectoriel*</u> :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

g) Utiliser la formule précédente pour déterminer $\vec{i} \wedge \vec{k}$ et de $\vec{j} \wedge \vec{k}$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et θ.

h) En déduire que :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\left(\overrightarrow{AB}, \vec{j}, \vec{k}\right)}{\sin\theta}\vec{i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BK} = \frac{\left(\overrightarrow{AB}, \vec{i}, \vec{k}\right)}{\sin\theta}\vec{j}\,.$$

i) Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}, \vec{i}, \vec{j}\right) = \sin\theta\left(\overrightarrow{HK} \cdot \vec{k}\right)$,

et que $\overrightarrow{HK} = \left(\overrightarrow{AB} \cdot \vec{k}\right)\vec{k}$.

4) Distance de deux droites

- Soit deux droites $(D) = (A\,; \vec{u})$ et $(D') = (B\,; \vec{v})$.

  On note *l* = *d*((*D*), (*D'*)).

a) On suppose ici (*D*) et (*D'*) sécantes en *I*. Déterminer alors *l*.

b) On suppose ici (*D*) et (*D'*) parallèles.

Montrer que : $l = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$.

c) On suppose ici (*D*) et (*D'*) non coplanaires. On note respectivement *H* et *K* les points d'intersection de (*D*) et (*D'*) avec leur perpendiculaire commune, notée (Δ), *[voir le paragraphe sur le perpendiculaire commune]*.

Soit *M* un point quelconque de (*D*) et *N* un point quelconque de (*D'*).

Soit *N'* le projeté orthogonal de *N* sur (*P*), plan contenant (*D*) et parallèle à (*D'*).

Montrer que *NN'* = *HK*, et que $MN \geq HK$.

d) Conclure en montrant que :

$$d((D), (D')) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right)\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}.$$

5) Distance de deux plans

- Soit deux plans (*P*) et (*P*'). On note *l* = *d*((*P*), (*P*')).

a) On suppose ici (*P*) et (*P'*) sécants. Déterminer alors la valeur de *l*.

b) On suppose ici (*P*) et (*P'*) parallèles. On note $(P) = (A\,; \vec{u}, \vec{v})$ et $(P') = (B\,; \vec{u}, \vec{v})$. Utiliser les paragraphes précédents pour exprimer cette distance en fonction des données.

c) En rapportant l'espace à un repère orthonormé direct $\left(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, les plans ont pour équations respectives :

$$(P) : ax + by + cz + d = 0$$
$$\text{et } (P') : ax + by + cz + d' = 0.$$

Déterminer la distance *l* des deux plans en fonction de *a*, *b*, *c*, *d* et *d'*.