PUISSANCES D'UN NOMBRE

I) Puissances de dix

a) Définition

- Si n est un entier strictement positif, on note 10^n et on lit « *10 puissance n* » l'entier obtenu comme produit de n fois le nombre 10.

Donc : $10^n = 10 \times 10 \times \cdots\cdots \times 10$ (n fois)

- L'entier n s'appelle *l'exposant* de 10^n.

b) Propriétés

- $10^n = 10\cdots\cdots0$. (un 1 suivi de n zéros).
- 10^n possède $n + 1$ chiffres en tout.
- 10 s'écrit 10^1 car c'est un 1 suivi de 1 zéro.

c) Formules (m et n strictement positifs)

$\boxed{10^m \times 10^n = 10^{m+n}}$ car $10^m \times 10^n = \underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{m \text{ fois}} \times \underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ fois}}$

« *Si on multiplie des puissances de* 10, *on ajoute leurs exposants* »

- Si m strictement supérieur à n, $\dfrac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$

d) Exposant nul

- L'écriture « 10^0 » n'a, *a priori*, pas de sens, puisqu'on ne peut multiplier 10 par lui-même zéro fois. Mais si on veut lui donner un sens pour que les formules précédentes soient encore valables, on remarque que : $\boxed{10^0 = 1}$

e) Exposant négatif

- De même, on a choisi : $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}0\cdots\cdots01}_{n \text{ zéros}}$

10^{-n} est donc un **nombre décimal strictement positif** et inférieur à 1.

- Quand n est négatif, on dit : « *10 exposant n* ».

f) Formules (m et n entiers quelconques)

- Les formules précédentes sont encore valables, puisqu'on a défini les exposants nul et négatifs pour qu'il en soit ainsi :

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n} \qquad \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$

II) Notation scientifique

a) Définition

- Tout nombre décimal positif peut s'écrire (et ceci d'une seule façon) sous la forme $\boxed{a \times 10^p}$, où p est un **entier relatif** (donc positif ou négatif) et où a est un **nombre décimal** compris entre 1 (inclus) et 10 (exclu).
- Pour les nombres négatifs, a est compris entre – 10 (exclu) et – 1 (inclus).

Exemples :

$3475{,}2 = 3{,}4752 \times 10^3$	$538 = 5{,}38 \times 10^2$
$0{,}00467 = 4{,}67 \times 10^{-3}$	$0{,}0001 = 1 \times 10^{-4} = 10^{-4}$
$-0{,}0123 = -1{,}23 \times 10^{-2}$	$-9000 = -9 \times 10^3$

b) **Méthode** pour la **notation scientifique** :

Multiplier ou diviser par 10 revient à « *décaler la virgule* », jusqu'à ce que le nouveau nombre soit entre 1 et 10 (s'il est positif), et de multiplier par la puissance de 10 nécessaire.

Exemples :

• avec 123,45 : Il faut **diviser** ce nombre par 100 pour obtenir un nombre entre 1 et 10. On a : 123,45 / 100 = 1,2345 donc : 123,45 = 1,2345 × 100 enfin : **123,45 = 1,2345 × 10²**.	• avec 0,000 987 : Il faut **multiplier** ce nombre par 10 000 pour obtenir un nombre entre 1 et 10. On a : 0,000 987 × 10 000 = 9,87 donc : 0,000 987 = 9,87 / 10 000 enfin : **0,000 987 = 9,87 × 10⁻⁴**.

c) Notation scientifique et calculatrice

- La calculatrice utilise la notation du point décimal anglo-saxon, mais il faudra toujours écrire une virgule décimale sur une copie.
- Il existe sur les calculatrices utilisées en Lycée les touches $\boxed{10^x}$ et $\boxed{\text{EXP}}$, mais elles servent à autre chose, qui sera vu plus tard.

III) Puissance de nombre décimal

a) Définition

- On définit a^n, où a est relatif, et n entier strictement positif par : $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots\cdots \times a}_{n \text{ fois}}$
- Pour a non nul, $\boxed{a^0 = 1}$ et $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$

b) Propriétés

- Si a est **positif**, a^n est **toujours positif**.
- Si a est **négatif**, a^n est positif si n est pair et négatif si n impair.

- L'expression « 0^0 » n'existe pas et n'a pas été définie, car elle rend contradictoires les deux formules $0^n = 0$ et $a^0 = 1$.

La puissance est prioritaire sur les quatre opérations.

Exemple : $2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$ et non 6^2. Si on veut que la puissance 2 s'applique à 2 × 3, il faut mettre des parenthèses : $(2 \times 3)^2 = 6^2 = 36$.

- À la calculatrice, on tape : $\boxed{1.2}$ $\boxed{}$ $\boxed{5}$ pour avoir la valeur de $(1{,}2)^5$.

c) Formules :

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}} \quad \boxed{(a \times b)^n = a^n \times b^n} \quad \boxed{(a^m)^n = a^{m \times n} = (a^n)^m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ (si } a \neq 0) \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ (si } b \neq 0)$$