SECOND DEGRÉ *(Rappels)*

I) Trinôme du second degré

a) Définition : $T = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$

Exemples : $x^2 - 3x + 2$, $2x^2 - x$, $-x^2 + 1$

b) Forme canonique (« début d'un carré »)

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

Exercice 1 – Déterminer les écritures canoniques des trinômes suivants :

$x^2 - 4x + 3$	
$-x^2 + 2x$	
$-2x^2 + 8x - 8$	
$x^2 + x + 1$	
$2x^2 + x - 3$	

II) Équation du second degré

a) Résolution de l'équation

(1) : $ax^2 + bx + c = 0$ (lorsque $b^2 - 4ac \geq 0$)

On peut résoudre (2) : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$,

c'est-à-dire (3) : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 = 0$

soit (4) : $\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le *discriminant* de l'équation.

Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Remarque : Dans les équations (3) et (4), on peut en fait choisir comme dénominateur sous le radical, soit $2a$, soit $-2a$, puisque les deux « racines » sont utilisées ; ce choix ne fait que permuter x_1 et x_2.

Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle :

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Remarque : Cette solution double n'est qu'un cas particulier du précédent (pour $\Delta = 0$). On pourra utiliser la première formule encadrée quand $\Delta \geq 0$.

Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solutions **réelles**.

Remarque : Il faudra bien préciser le mot « réelles », puisqu'il existe un ensemble (celui des *nombres complexes*, ensemble noté **C**) sur lequel cette équation a des solutions.

Exercice 2 – Résoudre les équations suivantes par la méthode du discriminant :

$2x^2 + x - 3 = 0$; $\Delta =$ Comme Δ , alors
$-2x^2 + 8x - 8 = 0$; $\Delta =$ Comme Δ , alors
$x^2 + x + 1 = 0$; $\Delta =$ Comme Δ , alors

b) Les trois écritures possibles d'un trinôme

- **Forme développée** ***:*** $T = ax^2 + bx + c$
- **Forme canonique** ***:*** $T = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$
- **Forme factorisée (dans P, si $\Delta \geq 0$)**

  $T = a(x-x_1)(x-x_2)$

III) Somme et produit des racines

- Pour tout réel x,

  $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2$
- Donc, par identification des coefficients,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Réciproque : Les deux réels de somme S et de produit P sont les solutions éventuelles de l'équation du second degré :

$x^2 - Sx + P = 0$.

Exercice 3 – Trouver deux réels dont la somme est 2 et le produit – 35.

- Les deux réels sont donc les solutions éventuelles de l'équation :
- Résolution :
- Solution :

IV) *Signe de T = ax² + bx + c*

On a : $T = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$. D'où :

- Si $\Delta \leq 0$, le trinôme T est toujours du signe de a.
- Si $\Delta > 0$, comme $T = a(x-x_1)(x-x_2)$, alors :
  T est du signe de $-a$ « entre les racines », donc,
  si on choisit $x_1 < x_2$, dans l'intervalle $]x_1\,;x_2[$,
  et du signe de a « à l'extérieur des racines », donc dans la réunion d'intervalles $]-\infty\,;x_1[\,\cup\,]x_2\,;+\infty[$

Exercice 4 – Déterminer le signe des trinômes :

$T = 2x^2 + x - 3$
$T = -2x^2 + 8x - 8$
$T = x^2 + x + 1$

V) *Tracé de la parabole d'équation* ***y = ax² + bx + c***

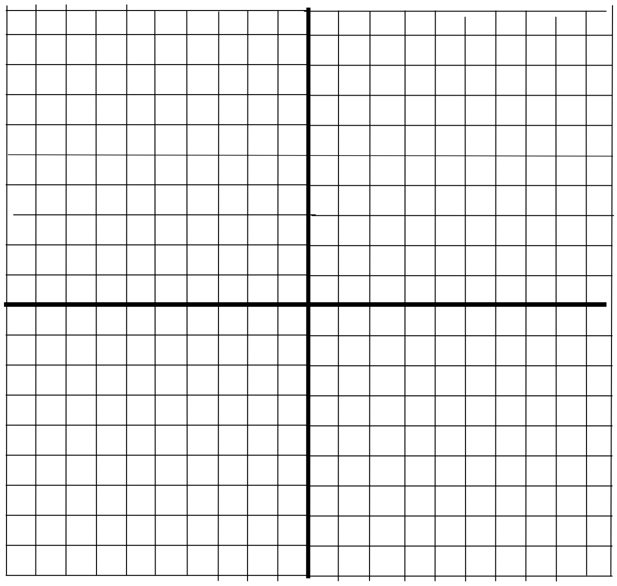
- De l'écriture

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right),$$

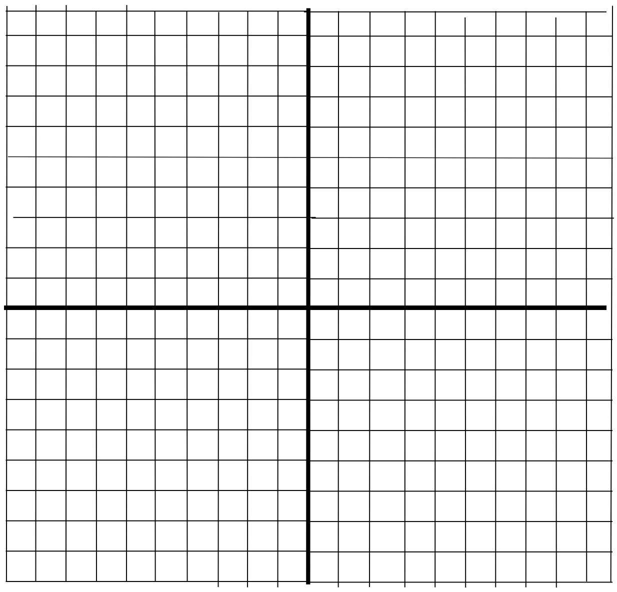
on déduit que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est l'image de celle d'équation $y = ax^2$ par la translation de vecteur $-\left(\dfrac{b}{2a}\right)\vec{i}-\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)\vec{j}$.

Exercice 5 – Tracer les courbes d'équations suivantes (choisir la meilleure unité, tracera aussi la courbe initiale, dans une autre couleur) :

$y = 2x^2 + x - 3$



$y = -2x^2 + 8x - 8$



$y = x^2 + x + 1$