

SIMILITUDES PLANES

I) Définition d'une similitude plane

- **Définition D1** : On appelle similitude du plan toute transformation σ du plan dans lui-même qui conserve les rapports de distances, c'est-à-dire :

Pour tous points A, B, C et D , avec $A \neq B$ et $C \neq D$, dont les images respectives par σ sont

$$A', B', C' \text{ et } D', \text{ alors : } \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$$

- **T1** : Une transformation σ est une similitude si et seulement s'il existe un unique réel k strictement positif tel que, pour tous points A et B , d'images respectives A' et B' par σ , on a : $A'B' = k AB$

- Le réel k est appelé le rapport de la similitude.
- **Deux exemples importants** :
Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$ (ne pas oublier les valeurs absolues !).
Une isométrie est une similitude de rapport 1.

II) Premières propriétés des similitudes

- **P1** : La composée de deux similitudes de rapports k_1 et k_2 est une similitude de rapport $k_1 \times k_2$.
- **Généralisation** : La composée de plusieurs similitudes est une similitude.
- **P2** : La réciproque d'une similitude (qui existe puisqu'une similitude est bijective) de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$ (k est non nul).
- **P3** : La composée d'une similitude de rapport k et d'une homothétie de rapport $\frac{1}{k}$ est une isométrie.
- **Conséquence** : Toute similitude σ_k de rapport k peut être considérée (et de plusieurs façons) comme la composée d'une homothétie h_k de rapport k et d'une isométrie f , sous la forme $\sigma_k = h_k \circ f$ ou $\sigma_k = f \circ h_k$.
Les propriétés qui suivent seront souvent de simples conséquences des propriétés vues sur les isométries et les homothéties.

III) Effets d'une similitude

1) Conservation des angles géométriques

- **P4** : Soit une similitude σ de rapport k .
Pour tous points A, B et C , d'images respectives A', B' et C' par σ , on a : $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = k^2 (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$
- **P5** : Une similitude conserve les angles géométriques, c'est-à-dire, (*points distincts*) :

$$B'A'C' = BAC$$

- **Conséquences** : Une similitude transforme trois points alignés en trois points alignés.
Si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires, alors les droites $(A'B')$ et $(A'C')$ le sont aussi.

2) Conservation du barycentre

- **T2 (démonstration non exigible)** : Une similitude conserve le barycentre, c'est-à-dire :
si $\{(A_i; \alpha_i), i \in 1; n\}$ est un système de points pondérés dont la somme des coefficients $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ est non nul, et dont le point G est le barycentre, alors $G' = \sigma(G)$, image de G par une similitude σ est le barycentre de $\{(\sigma(A_i); \alpha_i), i \in 1; n\}$.

3) Image de configurations par une similitude

- **P6** : L'image de la droite (AB) par σ est la droite $(A'B')$, avec $A' = \sigma(A)$ et $B' = \sigma(B)$.
- **P7** : L'image du segment $[AB]$ est de même le segment $[A'B']$, avec $A' = \sigma(A)$ et $B' = \sigma(B)$.
- **P8** : L'image du cercle de centre Ω et de rayon R est le cercle de centre $\sigma(\Omega)$ et de rayon kR .

IV) Similitudes directes

1) Définition

- **D2** : Une similitude directe σ est une similitude qui conserve les angles orientés, c'est-à-dire :

Pour tous points A, B, C et D , avec $A \neq B$ et $C \neq D$, d'images respectives A', B', C' et D' par σ , alors :

$$(\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{C'D'}) \equiv (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) [2\pi]$$

- **Exemples** : Les translations, les homothéties et les rotations sont des similitudes directes.

2) Écriture complexe d'une similitude directe

- **P9** : Soit P, Q et R trois points distincts deux à deux, dont les images respectives par une similitude directe σ sont P', Q' et R' , alors leurs affixes vérifient :

$$\frac{r' - p'}{q' - p'} = \frac{r - p}{q - p}$$

- **T3 (Première partie)**

Soit deux nombres complexes a et b , avec a non nul. Alors l'application σ du plan dans lui-même qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe :
 $z' = a z + b$ est une similitude directe de rapport $|a|$.

- **T4 (Deuxième partie)**

Soit σ une similitude directe qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' . Alors il existe deux nombres complexes a et b , avec a non nul, tels que :

$$z' = a z + b$$

- **D3** : L'égalité $z' = az + b$ est appelée l'écriture complexe de la similitude directe σ , dont le rapport est donc $|a|$.

- **T5** : Soit les points A, B, A' et B' , avec $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Alors il existe une unique similitude directe σ telle que $\sigma(A) = A'$ et $\sigma(B) = B'$.

3) Angle d'une similitude directe

- **P10** : Soit σ une similitude directe. Soit les points A, B, C et D , avec $A \neq B$ et $C \neq D$, dont les images respectives par σ sont A', B', C' et D' , alors :

$$(\overline{AB}; \overline{A'B'}) \equiv (\overline{CD}; \overline{C'D'}) \quad [2\pi]$$

- **D4** : Avec les notations précédentes, on appelle angle d'une similitude directe l'angle orienté $(\overline{AB}; \overline{A'B'})$.
- **T6** : Soit σ la similitude directe d'équation complexe $z' = az + b$, alors σ est la similitude directe :

d'angle $\theta \equiv \arg(a) \quad [2\pi]$ et de rapport $|a|$.

4) Exemples classiques

- Une translation est une similitude directe de rapport 1 et d'angle nul.
- Une homothétie de rapport k est une similitude directe de rapport $|k|$ et d'angle $\arg(k)$, donc d'angle 0 si $k > 0$ et d'angle π si $k < 0$.
- Une rotation de centre Ω et d'angle θ est une similitude directe de rapport 1 et d'angle θ .

5) Propriétés des similitudes directes

- **P11** : La composée de deux similitudes directes σ_1 et σ_2 de rapports respectifs k_1 et k_2 et d'angles respectifs θ_1 et θ_2 est une similitude directe $\sigma_2 \circ \sigma_1$ de rapport $k_1 \times k_2$ et d'angle $\theta_1 + \theta_2$.
- **P12** : La réciproque d'une similitude directe σ de rapport k et d'angle θ est une similitude directe σ^{-1} de rapport $1/k$ et d'angle $-\theta$.

V) Classification des similitudes directes

1) Notion de point invariant

- **D5** : Soit f une application. On dit qu'un point Ω est invariant par f si et seulement si $f(\Omega) = \Omega$. On dit aussi que Ω est un point fixe de f .

- **T7** : La seule similitude du plan ayant au moins trois points invariants non alignés est l'identité, qui, à tout point M , associe le point M lui-même.

2) Décomposition canonique d'une similitude directe grâce à son équation complexe

- **T8** : Soit σ la similitude directe d'équation complexe $z' = az + b$, donc d'angle $\theta \equiv \arg(a) \quad [2\pi]$ et de rapport $k = |a|$. On a les deux cas suivants :

➤ Si $a = 1$, alors σ est la translation de vecteur \vec{u} d'affixe b . Si $b = 0$, alors σ est l'identité, sinon σ n'a pas de points invariants.

➤ Si $a \neq 1$, σ admet un unique point invariant Ω , d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$. Le point Ω est appelé

le centre de la similitude directe, qui peut alors s'écrire comme la composée commutative

$$h \circ r = r \circ h :$$

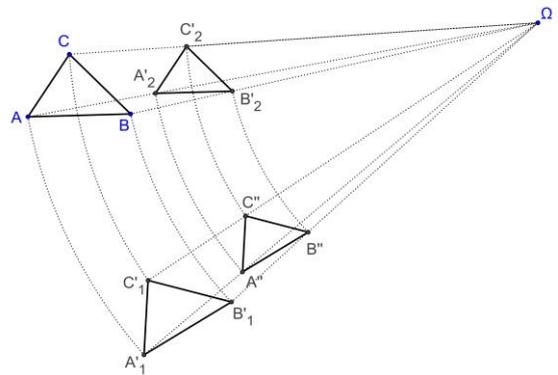
○ de l'homothétie h de centre Ω et de rapport $|a|$

○ de la rotation r de centre Ω et d'angle $\arg(a)$

- **Remarque** : L'écriture complexe $z' = az + b$ peut alors se présenter sous la forme $z' - \omega = a(z - \omega)$, donc sous la forme : $z' - \omega = |a|e^{i\arg(a)}(z - \omega)$. On retrouve bien la composée :

➤ de l'homothétie définie par $z' - \omega = k(z - \omega)$

➤ et de la rotation définie par $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

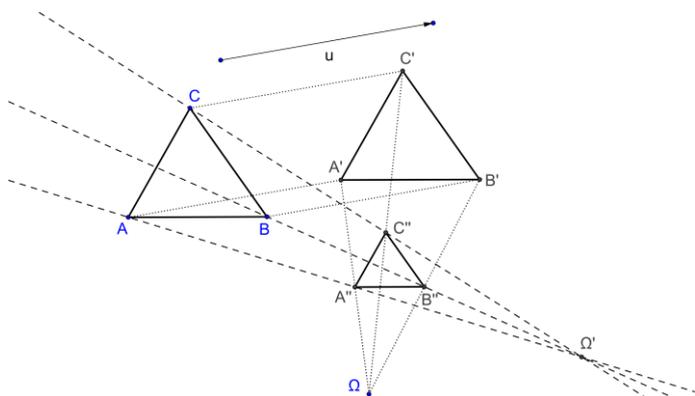


(dessin avec $k = 0,75$ et $\theta = \pi/6$)

Le triangle (ABC) a pour image $(A''B''C'')$ par la rotation r , et ce dernier a pour image $(A'B'C')$ par l'homothétie h . Le triangle (ABC) a pour image $(A_2B_2C_2)$ par l'homothétie h , et ce dernier a pour image à nouveau $(A''B''C'')$ par r . On retrouve bien $h \circ r = r \circ h$.

3) Décomposition canonique en tant que composée d'une homothétie et d'un déplacement

- **T9** : Il y a deux cas à étudier, car il y a deux types de déplacements : les translations et les rotations.
- Cas $h_{\Omega,k} \circ t_{\vec{u}}$: il faut distinguer deux cas :
 - Si $k = 1$ (l'homothétie est alors l'identité), on retrouve la translation $t_{\vec{u}}$.
 - Si $k \neq 1$, $h_{\Omega,k} \circ t_{\vec{u}}$ est une homothétie de même rapport k , puisque les équations respectives des transformations sont $z' = z + \lambda$ et $z'' = k(z' - \omega) + \omega$, d'où $z'' = k(z + \lambda - \omega) + \omega$, ou encore $z'' = kz + (k\lambda - k\omega + \omega)$, où ω et λ sont les affixes respectives de Ω et \vec{u} .



(dessin avec $k = 0,5$)

- On peut trouver son centre Ω' par le calcul ou la construction :
 - **Calcul** : L'affixe de son centre est la solution de l'équation $z'' = z \dots$
 - **Construction** : Puisque la composée est une homothétie, le centre est le point de concours des droites joignant tout point et son image. On remarquera que ce cas (homothétie) est en fait un cas particulier de $h \circ r$: c'est lorsque l'angle de la rotation est nul.
- Cas $h_{J,k} \circ r_{I,\theta}$: Il s'agit de la composée commutative d'une homothétie de rapport k et de la rotation d'angle θ de même centre Ω : $h_{\Omega,k} \circ r_{\Omega,\theta}$.

Construction pour trouver Ω (pour information).

On peut utiliser pour cela une propriété vue en 1^{ère} sur les points cocycliques et l'égalité des angles :

- Le segment $[AB]$ a pour image le segment $[A'B']$ par la rotation r , et ce dernier a pour image le segment $[A''B'']$ par l'homothétie h .
- On sait que l'angle de la similitude, qui est celui de la rotation, est $\theta = (\overline{AB}; \overline{A''B''})$.
- Les droites (AB) et $(A''B'')$ se coupent en K . On trace alors les cercles circonscrits aux triangles (KAA'') et (KBB'') , qui se coupent en K et aussi en un autre point Ω , qui est le point cherché (s'il n'y a pas d'autre point, $\Omega = K$)...

4) Composées de similitudes directes

- **P13** : La composée de deux similitudes directes est une similitude directe, donc soit une translation, soit une composée commutative $h \circ r = r \circ h$ d'une homothétie et d'une rotation de même centre. Pour plus de précisions sur la nature et les éléments caractéristiques de la composée, on peut utiliser l'écriture complexe, ou encore les propriétés sur la composée des déplacements vues au début.

VI) Similitudes indirectes

1) Définition et exemples

- **D10** : Une similitude indirecte est une similitude qui n'est pas directe.
- **Exemples** : Une réflexion s , la composée $t \circ s$ avec une translation et la composée $h \circ s$ avec une homothétie, sont des similitudes indirectes.

• **T11** : La seule similitude, directe ou indirecte, autre que l'identité, ayant au moins deux points distincts invariants A et B , est la réflexion d'axe (AB) .

2) Propriété de base

- **P33** : Soit σ une similitude indirecte. Soit A et B deux points distincts dans le plan. Il existe alors une similitude directe f telle que $\sigma = f \circ s_{(AB)}$ où $s_{(AB)}$ est la réflexion d'axe (AB) .

3) Écriture complexe d'une similitude indirecte

- **T12 (Première partie)**
Soit deux complexes a et b , avec a non nul. Alors l'application σ du plan dans lui-même qui, au point M d'affixe z , associe M' d'affixe : $z' = a \bar{z} + b$ est une similitude indirecte de rapport $|a|$.
- **T13 (Deuxième partie)**
Soit σ une similitude indirecte qui, au point M d'affixe z , associe M' d'affixe z' . Alors il existe deux nombres complexes a et b , avec a non nul, tels que : $z' = a \bar{z} + b$

- **D11** : L'égalité $z' = a \bar{z} + b$ est appelée l'écriture complexe de la similitude indirecte σ , dont le rapport est donc $|a|$.

4) Propriétés

- **P34** : Toute similitude indirecte transforme tout angle orienté en son opposé.
- **P35** : En faisant un parallèle entre la composition des similitudes et le signe du produit de deux réels (positif pour directe et négatif pour indirecte), on retiendra, comme la « règle des signes » :
 - La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.

- La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.
- Et on retrouvera : La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.
- **P36** : La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

• **T14** : Soit les points A, B, A' et B' , avec $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Alors il existe une unique similitude indirecte σ telle que $\sigma(A) = A'$ et $\sigma(B) = B'$.

VII) Triangles semblables

- **D12** : On dit que deux triangles (ABC) et $(A'B'C')$ sont semblables lorsqu'il existe une similitude qui transforme les sommets de l'un sur ceux de l'autre. On précise directement semblables (respectivement indirectement semblables) lorsque la similitude est directe (respectivement indirecte).
- **T15** : Soit (ABC) et $(A'B'C')$ deux triangles. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) Il existe une similitude telle que :
 $A' = \sigma(A), B' = \sigma(B)$ et $C' = \sigma(C)$.
- 2) $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$
- 3) $B'A'C' = BAC, C'B'A' = CBA$ et $A'C'B' = ACB$
- 4) $B'A'C' = BAC$ et $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$

- **Remarques préliminaires** :
Pour prouver l'équivalence de plusieurs propositions, on peut utiliser la transitivité de l'implication :
 $((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R))$ est synonyme de $(P \Rightarrow R)$ et le fait que l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est synonyme de la « double implication » : $((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P))$
- Ainsi l'équivalence des quatre propositions peut être démontrée par les cinq implications suivantes :

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$$

$$(1) \Leftarrow (2) \Leftarrow (3) \Leftarrow (4)$$

$((1) \Leftarrow (2))$ n'est pas exigible et sera admise)

Indications pour les démonstrations :

- $(1) \Rightarrow (2)$: Notons k le rapport de σ ...
- $(2) \Rightarrow (3)$: Notons k ces trois quotients égaux. Une des trois formules d'Al-Kashi dans le triangle (ABC) donne :
 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(BAC) \dots$
- $(3) \Rightarrow (4)$: La formule des sinus permet d'écrire :
 $\frac{AB}{\sin(ACB)} = \frac{AC}{\sin(ABC)}$ dans le triangle (ABC) ...
- $(4) \Rightarrow (2)$: Notons $\frac{A'B'}{AB} = k$ et utilisons les formules d'Al-Kashi en A et en A' respectivement dans les triangles (ABC) et $(A'B'C')$...

5) Autres propriétés (pour information)

- L'écriture complexe de la réflexion d'axe la droite d'équation $y = (\tan \theta)x$ est :
 $z' = e^{2i\theta} \bar{z}$.
- Toute translation t peut s'écrire comme la composée de deux réflexions d'axes parallèles dont les axes ont le vecteur de t comme vecteur normal. L'un des deux axes peut-être choisi arbitrairement. De même, toute rotation r peut s'écrire comme la composée de deux réflexions d'axes sécants, de point d'intersection le centre de r . L'un des deux axes peut-être choisi arbitrairement.
- Un antidéplacement est la composée d'un déplacement et d'une réflexion. Les antidéplacements sont donc constitués des composées $t \circ s$ et $r \circ s$, où t, r et s sont respectivement des translation, rotation et réflexion.
- En associant les deux propriétés précédentes, on peut montrer que l'ensemble des antidéplacements est constitué des réflexions et de la composée commutative $t \circ s = s \circ t$ d'une réflexion s et d'une translation t non identique dont le vecteur dirige l'axe de s ; une telle transformation s'appelle une symétrie glissée. Elle n'a pas de points invariants.