QUELQUES STRUCTURES ALGÉBRIQUES

I) Monoïde et groupe

Préliminaire : Soit E un ensemble non vide. On appelle *loi* de E une opération *, qui, à partir de deux éléments x et y de E, crée un élément de E, noté $x * y$.
On dit que * est une *loi de composition interne*.

Soit E un ensemble, et soit * une loi de E.

1) $(E , *)$ est un *monoïde* si et seulement si :

- $*$ est *associative*, c'est-à-dire :

$$\forall (x , y , z) \in E^3 , (x * y) * z = x * (y * z)$$

E1 : Préciser si les lois suivantes sont associatives :
a) L'addition, la multiplication, la soustraction dans **N**
b) La division dans **N***
c) L'exponentiation (*mise à la puissance*) dans **N***

2) $(E , *)$ est un monoïde *unitaire* si et seulement si :

- $(E , *)$ est un monoïde
- $*$ admet un *élément neutre*, c'est-à-dire :

$$\exists\, e \in E, \forall\, x \in E, x * e = e * x = x$$

E2 : Soit $(E , *)$ un monoïde unitaire.
Montrer que son élément neutre e est unique.

E3 : On note E un ensemble quelconque et $P(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E.
Déterminer l'élément neutre de :
$(\mathbf{R}, +)$, $(\mathbf{R}^*, \times)$, $(P(E), \cap)$ et $(P(E), \cup)$.

E4 : Dans E muni de la loi *, un élément a est dit *régulier* si et seulement si, pour tout couple (x , y) de $E \times E$, $(a * x = a * y)$ implique $(x = y)$.
Déterminer les éléments réguliers dans chacun des quatre exemples de l'exercice 3.

E5 : Montrer que, dans un monoïde unitaire, il existe toujours au moins un élément régulier.

3) $(E , *)$ est un monoïde *commutatif* si et seulement si :

- $(E , *)$ est un monoïde
- $*$ est *commutative* : $\forall (x , y) \in E^2, x * y = y * x$

4) $(E , *)$ est un *groupe* si et seulement si :

- $(E , *)$ est un monoïde unitaire
- tout élément est *symétrisable*, c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in E, \exists\, x' \in E, x * x' = x' * x = e$$

x' s'appelle le *symétrique* de x pour *

5) $(E , *)$ est un *groupe commutatif* si et seulement si :

- $(E , *)$ est un groupe
- $*$ est commutative

E6 : Soit $(E , *)$ un monoïde unitaire.
Montrer que tout élément de E n'a au plus qu'un symétrique pour *.

E7 : Déterminer les éléments symétrisables (et préciser alors les symétriques) de :
$(\mathbf{R}, +)$, $(\mathbf{R}^*, \times)$, $(P(E), \cap)$ et $(P(E), \cup)$.

E8 : Montrer que dans un monoïde unitaire, tout élément symétrisable est régulier.

E9 : Soit $(E , *)$ un monoïde unitaire.
Pour tout élément x de E, on appelle *symétrique à gauche* de x un élément x' de E tel que $x' * x = e$.
De même, on appelle *symétrique à droite* de x un élément x'' de E tel que $x * x'' = e$.
Montrer que si tout élément de E admet un symétrique à gauche, il admet un symétrique à droite, et qu'alors ces deux symétriques sont égaux.

E10 : Soit $(E , *)$ un ensemble muni d'une loi. Étudier l'associativité, l'existence d'un élément neutre et la commutativité de * dans E dans les cas suivants :

a) $E = \mathbf{R}$ et $a * b = a$

b) $E = \mathbf{R}$ et $a * b = a^2 + b^2$

c) $E = \mathbf{R}$ et $a * b = \dfrac{a+b}{2}$.
Comparer $a * (b * c)$ et $(a * b) * (a * c)$

d) $E = \mathbf{R}_+^*$ et $a * b = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

f) $E = \mathbf{R}$ et $a * b = a + b + ab$
Étudier aussi si tout réel admet un symétrique pour *.

E11 : Montrer que, si dans un groupe $(E , *)$, tout élément est son propre symétrique, alors le groupe est commutatif pour la loi *.

E12 : Soit $(E , *)$ un groupe. On note $a^2 = a * a$.
Montrer que, si pour tous éléments a et b de E, $(a * b)^2 = a^2 * b^2$, alors le groupe est commutatif.

E13 : Liste des groupes à 2 ; 3 et 4 éléments.
Soit $(E , \times)$ un groupe. [*la loi est notée multiplicativement pour simplifier les notations.*].
On note e son élément neutre.

a) On suppose que E a exactement deux éléments, notés e et x. Dresser la table de composition pour cette loi. Montrer qu'elle est alors commutative.

b) On suppose que E a exactement trois éléments, notés e, x et y. Montrer que $y = x^2$ et dresser la table de composition pour cette loi. Montrer qu'elle est alors commutative.

c) On suppose que E a exactement quatre éléments, notés e, x, y et z. Montrer qu'il existe deux groupes de ce type, l'un vérifiant $y = x^2$ et $z = x^3$, et l'autre, appelé *groupe de Klein*, avec $x^2 = y^2 = z^2 = e$ et $xy = z$, $yz = x$ et $zx = y$. Dresser les deux tables possibles de composition pour cette loi.
Montrer qu'elles sont commutatives.

II) Anneau et corps

Soit E un ensemble, et soit * et T deux lois de E.

1) $(E , * , T)$ est un *anneau* si et seulement si :

- $(E , *)$ est un groupe commutatif
- T est associative (*voir a)*)
- T est *distributive par rapport à* $*$, c'est-à-dire :

$$\forall (x , y , z) \in E^3, x \mathrm{T} (y * z) = (x \mathrm{T} y) * (x \mathrm{T} z)$$

2) $(E , * , T)$ est un *anneau commutatif* ssi :

- $(E , * , T)$ est un anneau
- T est commutative

3) $(E, * , T)$ est un *corps* si et seulement si :

- $(E , * , T)$ est un anneau
- $(E - \{e\} , T)$ est un groupe (e élément neutre pour *)

4) $(E , * , T)$ est un *corps commutatif* si et seulement si :

- $(E , * , T)$ est un corps
- T est commutatif

E14 : Soit $(E , * , T)$ un ensemble muni de deux lois. Étudier, pour chacune des deux lois, l'associativité, l'existence d'un élément neutre, la commutativité, et la distributivité de T par rapport à * dans les cas suivants :

a) $E = \mathbf{R}$, $a * b = a + 2b$ et $a \mathrm{T} b = 2ab$.

b) $E = \mathbf{R}_+$, $a * b = \sup(a ; b)$ et $a \mathrm{T} b = \inf(a ; b)$.
Étudier de plus la distributivité de * par rapport à T.

E15 : Préciser les meilleures structures, parmi celles citées plus haut, des ensembles et lois suivants :

$(\mathbf{N} , +)$	$(\mathbf{N} , \times)$	$(\mathbf{N} , :)$	$(\mathbf{Z} , +)$
$(\mathbf{Q} , \times)$	$(Z , \times)$	$(\mathbf{Z}^* , \times)$	$(\mathbf{Q}^* , \times)$
$(\mathbf{Q} , +)$	$(\mathbf{Z} , + , \times)$	$(\mathbf{Q} , + , \times)$	$(\mathbf{R} , + , \times)$
$(P(E) , \cap)$	$(P(E) , \Delta)$	$(P(E) , \cup)$	$(P(E) , \Delta , \cap)$
différence symétrique : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$			
(T , o)	T : ensemble des translations, o : composée		
(H , o)	H : ensemble des homothéties		
(B , o)	B : ensemble des bijections de E vers E		

E16 : La fonction *logarithme népérien*, notée *ln*, définie de $\mathbf{R}_+^*$ vers $\mathbf{R}$, vérifie :

Pour tout (x , y) de $\mathbf{R}_+^{*2}$, $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$.

La fonction *exponentielle*, sa réciproque, notée *exp*, définie de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}_+^*$, vérifie :

Pour tout x de $\mathbf{R}$, $exp(x) = e^x$ (où $e \approx 2{,}718$)

Pour tout (x , y) de $\mathbf{R}^2$, $e^{x+y} = e^x \times e^y$

On définit la loi • sur les réels par : $a \bullet b = \ln\left(e^a + e^b\right)$.

Montrer que cette loi est commutative et associative, et que l'addition est distributive par rapport à cette loi.

E17 : Soit $(E , *)$ un groupe, d'élément neutre e.

a) Soit a un élément de E. Montrer que s'il existe un élément b de E tel que $a * b = b$, alors $a = e$.

b) En déduire que dans l'anneau $(E , * , T)$, l'élément neutre e pour $*$ est élément *absorbant* pour T :

$$\forall a \in E, a \mathrm{T} e = e \mathrm{T} a = e.$$

c) Montrer aussi que si l'on note z' le symétrique de z pour $*$, alors :

$$\forall (x , y) \in E^2, (x \mathrm{T} y)' = x \mathrm{T} (y') = (x') \mathrm{T} y.$$

E18 : Un anneau est appelé *anneau de Boole*[1] $(E , * , T)$ si et seulement si : $\forall x \in E, x \mathrm{T} x = x$

a) Montrer que, pour tout x de E, $x * x = e$, élément neutre pour $*$.

b) Montrer que $(E , * , T)$ est un anneau commutatif.

c) Déterminer, pour tout couple (x , y) de E^2 ,

$$z = x \mathrm{T} y \mathrm{T} (x * y).$$

III) Sous-groupe, morphisme

1) Soit $(E , *)$ un groupe et F un sous-ensemble de E, $(F , *)$ est un *sous-groupe* de $(E , *)$ ssi :

- F est *stable* pour $*$: $\forall(x , y) \in F^2, x * y \in F$
- $(F , *)$ est un groupe

2) Remarque : $(F , *)$ est un sous-groupe de $(E , *)$ ssi :

- F est non vide
- $\forall(x , y) \in F^2, x * y' \in F$ (y' symétrique de y pour $*$)

3) Soit f une fonction définie de E vers F. Soit $*$ et T deux lois opérant respectivement sur E et sur F.

f est un *morphisme* de $(E , *)$ vers (F , T) ssi :

$$\forall (x , y) \in E^2 , f(x * y) = f(x) \mathrm{T} f(y).$$

E19 : Montrer que le groupe $(\mathbf{R}_+^* , \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{R}^* , \times)$.

E20 : Les applications suivantes sont-elles des morphismes ?

a) $f : x \mapsto ax$ de $(\mathbf{R} , +)$ vers $(\mathbf{R} , +)$

b) $f : x \mapsto x^2$ de $(\mathbf{R} , \times)$ vers $(\mathbf{R} , \times)$

c) $f : x \mapsto \ln x$ de $(\mathbf{R}_+^* , \times)$ vers $(\mathbf{R} , +)$

d) $f : x \mapsto e^x$ de $(\mathbf{R} , +)$ vers $(\mathbf{R}_+^* , \times)$

E21 : Soit f un morphisme du groupe $(E , *)$ vers le groupe (F , T).

a) Soit e et ε les éléments neutres respectifs de $(E , *)$ et (F , T). Montrer que $f(e) = \varepsilon$.

b) Pour tout x de E, on note x' le symétrique de x par $*$, et pour tout y de F, on note y'' le symétrique de y par T. Montrer que $\forall a \in E, f(a') = (f(a))''$.

c) On appelle *noyau* de f, et on note Ker f, l'ensemble des antécédents de ε par f.
Montrer que (Ker f , $*$) est un sous-groupe de $(E , *)$.

d) On définit l'*ensemble-image* de f, noté Im f, comme l'ensemble des images des éléments de E par f.

$$\text{Ainsi } \operatorname{Im} f = \{ y \in F, \exists\, x \in E,\ f(x) = y \}$$

Soit f un morphisme de $(E , *)$ vers $(E , *)$
[Donc ici $F = E$.] Montrer que :

- $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} (f \circ f)$ ssi $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{ e \}$.
- $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} (f \circ f)$ ssi $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$.

(Si A et B sont deux ensembles, la notation $A + B$ désigne l'ensemble des éléments de la forme $a + b$, où $a \in A$ et $b \in B$.)

(1) *George Boole, mathématicien anglais, 1815–1864*

IV) Relation d'équivalence et classe d'équivalence

1) Soit E un ensemble.
On appelle *relation binaire dans E* toute proposition liée à deux éléments de E, et on la note $\Re$.
Dire que x est en relation avec y se note $x \Re y$.

2) On dit qu'une relation binaire est une *relation d'équivalence* si et seulement si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- *réflexive* : $\forall x \in E, x \Re x$
- *symétrique* : $\forall (x,y) \in E^2, (x \Re y) \Rightarrow (y \Re x)$
- *transitive* :

$$\forall (x,y,z) \in E^3, \left((x \Re y) \wedge (y \Re z)\right) \Rightarrow (x \Re z)$$

E22 : Préciser si les relations suivantes sont réflexives, symétriques ou transitives :

a) La colinéarité des vecteurs du plan

b) La divisibilité des entiers

c) Le parallélisme des droites dans le plan

d) La perpendicularité des plans de l'espace

E23 : Soit $\Re$ une relation réflexive et transitive sur un ensemble E. On définit la relation $\Im$ par : pour tous x et y de E, $(x \Im y) \Longleftrightarrow \left((x \Re y) \wedge (y \Re x)\right)$.
Montrer que $\Im$ est une relation d'équivalence.

E24 : Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On définit la relation $\Re$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2, x \Re y \Leftrightarrow x - y \text{ multiple de } n.$$

On note $x \equiv y[n]$ et on lit « *x congru à y modulo n* »

Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

3) Soit E un ensemble, soit $\Re$ une relation d'équivalence sur E. Soit a un élément de E.
On appelle *classe d'équivalence* de a, et l'on note cl(a), l'ensemble des éléments x de E tels que $x \Re a$.

E25 : On considère la relation « *congruence modulo n* » de l'exercice précédent.
On note $\mathbf{Z} / n\mathbf{Z}$ l'*ensemble-quotient*, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les classes d'équivalence.

a) Montrer que si b est dans cl(a), alors cl(a) = cl(b).

b) Montrer que :

$$\mathbf{Z} / n\mathbf{Z} = \{\text{cl}(0), \text{cl}(1), ..., \text{cl}(n-2), \text{cl}(n-1)\}.$$

c) Soit a, b, c et d quatre éléments de $\mathbf{Z}$, tels que

$$a \Re b \text{ et } c \Re d.$$

Montrer que $(a+c) \Re (b+d)$, que $(ac) \Re (bd)$, et que $(a^p) \Re (b^p)$, avec p entier positif.

E26 : On définit les deux lois + et × :
On pose, pour tout couple (x , y) de $\mathbf{Z}^2$,
cl(x) + cl(y) = cl($x + y$) et cl(x) × cl(y) = cl($x \times y$).
Montrer que ($\mathbf{Z} / n\mathbf{Z}$, + , ×) est un anneau commutatif unitaire.

E27 : La définition d'une relation d'équivalence étant donnée précédemment, commenter et critiquer la démonstration suivante :

« *Soit $\Re$ une relation symétrique et transitive sur E.*
On va montrer qu'elle est alors réflexive.
En effet, prenons z = x dans la définition de la transitivité.
On a alors : $\forall (x,y) \in E^2, \left((x \Re y) \wedge (y \Re x)\right) \Rightarrow (x \Re x)$.
Or $\Re$ est symétrique donc :
$\forall (x,y) \in E^2, (x \Re y) \Rightarrow (y \Re x)$
donc on a bien : $\forall x \in E, x \Re x$. »

V) Relation d'ordre et ordre total

1) Soit E un ensemble. On dit qu'une relation binaire est une *relation d'ordre* si et seulement si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- *réflexive*
- *antisymétrique* :

$$\forall (x,y) \in E^2, \left((x \Re y) \wedge (y \Re x)\right) \Rightarrow (x = y)$$

- *transitive*

E28 : Montrer que les relations suivantes sont des relations d'ordre :

a) La divisibilité des entiers strictement positifs

b) La relation « *inférieur ou égal* » des réels

c) La relation d'inclusion dans les ensembles

2) Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre.
On dit que deux éléments x et y de E sont *comparables* si et seulement si $x \Re y$ ou $y \Re x$. On dit que la relation est d'*ordre total* si et seulement si deux éléments quelconques de E sont comparables.
On dit alors que E est *totalement ordonné*.
Sinon, on parle d'*ordre partiel*.

E29 : Préciser si les trois exemples cités dans l'exercice précédent sont des relations d'ordre total ou partiel.

VI) Espace vectoriel

a) Soit (E , +) un groupe commutatif et (K , + , ×) un corps commutatif. On dit que E est un *espace vectoriel sur K* si et seulement s'il existe une loi de composition associant à tout élément α de K (appelé *scalaire*) et à tout x de E (appelé *vecteur*), l'élément noté $\alpha \times x$, avec les propriétés suivantes :
Pour tout (x ; y) de E^2, pour tout (α ; β) de K^2,

- $1 \times x = x$ (1 est l'élément neutre de ×)
- $\alpha \times (\beta \times x) = (\alpha \times \beta) \times x$
- $\alpha \times (x + y) = \alpha \times x + \alpha \times y$
- $(\alpha + \beta) \times x = \alpha \times x + \beta \times x$

b) Une partie non vide F de l'espace vectoriel E sur K est un *sous-espace vectoriel* de E si et seulement si :

- (F , +) est un sous-groupe de (E , +)
- $\forall \alpha \in K, \forall x \in F, \alpha \times x \in F$

c) Remarque : F est un sous-espace vectoriel de E sur K si et seulement si :

- F est non vide
- $\forall (x , y) \in F^2, x + y \in F$
- $\forall \alpha \in K, \forall x \in F, \alpha \times x \in F$

Ces deux dernières propriétés peuvent se regrouper en :

- $\forall (\alpha , \beta) \in K^2, \forall (x , y) \in F^2, \alpha \times x + \beta \times y \in F$

d) On obtient, par exemple, un sous-espace vectoriel de E de la façon suivante :

- Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ n éléments de E et $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ n éléments de K.
  Une *combinaison linéaire* de $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est un élément de la forme :
  $$y = \alpha_1 \times x_1 + \alpha_2 \times x_2 + \cdots + \alpha_n \times x_n .$$
- L'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- On l'appelle le sous-espace vectoriel *engendré* par $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

e) On dit que $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ forme une suite de *vecteurs liés* si et seulement si on peut trouver des scalaires $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, non tous nuls, tels que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

On dit aussi que les vecteurs sont *linéairement dépendants*. Dans le cas contraire, on dit que les vecteurs sont *libres*, ou encore *linéairement indépendants*.

f) Remarque : Une suite de vecteurs est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

g) On dit que l'espace vectoriel E possède n *générateurs* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ si et seulement si ces vecteurs sont dans E et si tout vecteur de E est une combinaison linéaire de ces vecteurs.

- L'ensemble coïncide avec l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, et est donc l'espace vectoriel engendré par cette suite.

E30 : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

a) Montrer que $F \cap G$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

b) On pose $E = \mathbf{R}^3$. F est engendré par $a = (1 ; 0 ; 0)$ et $b = (0 ; 1 ; 0)$, et G est engendré par $c = (0 ; 1 ; 1)$ et $d = (1 ; 0 ; 1)$. Déterminer $F \cap G$.

E31 : Dans $E = \mathbf{R}^3$, déterminer le réel x pour que les vecteurs $a = (1 ; 0 ; 3)$, $b = (0 ; 1 ; 2)$ et $c = (2 ; x ; 0)$ sont linéairement dépendants.

E32 : Dans le corps $(\mathbf{R} , + , \times)$ considéré comme espace vectoriel sur le corps $(\mathbf{Q}, + , \times)$, montrer que 1 et $\sqrt{2}$ sont linéairement indépendants.

E 33 : *La fonction caractéristique (Algèbre de Boole)*

Soit E un ensemble, et A et B deux sous-ensembles de E.

On définit l'application f_A de E vers $\mathbf{R}$, par pour tout x de E, $f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$.

f_A s'appelle la *fonction caractéristique* de A.

On définit de même la fonction caractéristique du sous-ensemble B, notée f_B.

On note $F(E, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de E vers $\mathbf{R}$

1) Déterminer si les deux fonctions suivantes sont des morphismes :
$f : A \mapsto \chi_A$ de $(P(E) , \Delta)$ vers $(F(E , \mathbf{R}) , +)$
$f : A \mapsto \chi_A$, de $(\mathrm{P}(E) , \cap)$ vers $(F(E , \mathbf{R}) , \times)$.

2) On note $(f_A)^2$ la fonction vérifiant : pour tout x de E, $(f_A)^2(x) = (f_A(x))^2$. Montrer que $(f_A)^2 = f_A$

3) a) Montrer que $f_{A\cap B} = f_A \times f_B$.

b) Montrer que $f_{\overline{A}} = 1 - f_A$, où $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E.

c) Exprimer alors $f_{A\cup B}$ en fonction de f_A et de f_B.

d) Préciser, en fonction de f_A et de f_B, les fonctions caractéristiques des ensembles suivants :
$A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cup B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$.

e) Soit $A - B = A \cap \overline{B}$ et $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

f) Montrer les deux égalités suivantes :

$$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}).$$

g) Montrer que l'on a : $f_{A\Delta B} = (f_A - f_B)^2$.

h) Montrer que $f_{A\Delta B} = f_{A\cup B} - f_{A\cap B}$