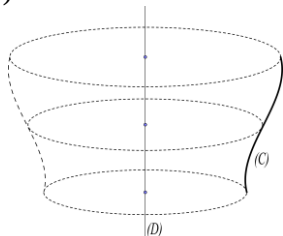


SURFACES DANS L'ESPACE

Dans tout ce chapitre, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

I) Surface de révolution

- Définition D1** : Soit (S) une surface et (D) une droite. On dit que (S) est une surface de révolution d'axe (D) lorsque, pour tout plan (P) , perpendiculaire à (D) , l'intersection de (S) et de (P) est soit l'ensemble vide, soit un ou plusieurs cercle(s) de centre le point d'intersection de (D) avec (P) .
- En particulier**, on obtient une surface de révolution grâce à la rotation autour d'un axe (D) d'une courbe (C) plane incluse dans un plan contenant (D) .



II) Exemples de surfaces et leurs équations

1) Le plan

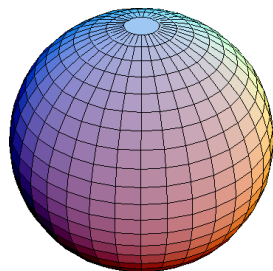
- D2** : Un plan (P) est défini par la donnée d'un point A inclus dans (P) et d'un vecteur normal $\vec{n}$, vecteur directeur des droites perpendiculaires à (P) . On sait que $M \in (P)$ équivaut à $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
- Propriété P1** : Les points M , de coordonnées $(x; y; z)$, sont dans (P) si et seulement s'il existe quatre réels a, b, c et d , avec a, b et c non tous nuls, tels que : $ax + by + cz + d = 0$. Le vecteur de coordonnées a, b et c est colinéaire à $\vec{n}$.

2) La sphère

- D3** : Une sphère (S) , de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon R , réel strictement positif, est l'ensemble des points tels que $\Omega M = R$.
- P2** : Les points $M(x; y; z)$ sont dans (S) si et seulement si :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

- Une sphère est un solide de révolution obtenu en faisant tourner autour d'une droite un demi-cercle dont les extrémités sont sur cette droite.



3) Le cylindre de révolution

- D4** : Un cylindre de révolution (C) d'axe la droite (D) et de rayon R est l'ensemble des points M dont la distance à (D) est égale à R , réel strictement positif, donc tels que $HM = R$, où H est le projeté orthogonal de M sur (D) .
- P3** : Si on choisit $(D) = (O; \vec{k})$, les points $M(x; y; z)$ sont dans (C) si et seulement si :

$$x^2 + y^2 = R^2$$



- Un cylindre de révolution s'obtient en faisant tourner autour d'un axe une droite strictement parallèle.
- Remarques** : Un cylindre de révolution, comme les autres surfaces de révolution à venir, ont une « hauteur » infinie, contrairement aux cylindres vus habituellement pour les calculs d'aires et de volumes.
- Malgré l'absence de la coordonnée z (la cote) dans l'écriture de l'équation, il s'agit bien ici d'un cylindre dans l'espace et non d'un cercle dans le plan.

4) Le cône de révolution

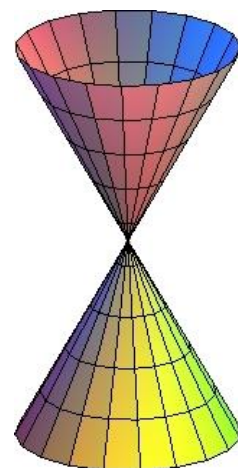
- D5** : Un cône de révolution (C) d'axe la droite (D) , de sommet S appartenant à (D) et d'angle au sommet $\alpha \in]0; \pi[$ est, à part S , l'ensemble des points M tels que

$$HSM = \frac{\alpha}{2}, \text{ où } H \text{ est le projeté orthogonal de } M \text{ sur } (D).$$

- P4** : Si on choisit S comme origine du repère et si $(D) = (S; \vec{k})$, les points $M(x; y; z)$ sont dans (C) si et seulement si :

$$x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

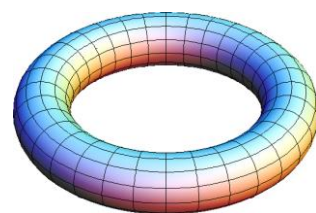
- Attention !** L'angle au sommet α est le double de celui utilisé dans l'équation.
- Un cône de révolution s'obtient en faisant tourner autour d'un axe une droite sécante avec cet axe.
- Remarque** : Outre la remarque déjà faite sur la « hauteur » infinie, un cône tel qu'il est défini ici est en fait constitué de deux « cônes », opposés par le sommet, définis habituellement pour les calculs.



5) Le tore

- D6** : Un tore s'obtient en faisant tourner autour d'un axe un cercle sans intersection avec l'axe.
- Pour information**, avec a comme rayon « majeur » et b comme rayon « mineur », son équation peut être :

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$



III) Surface représentative

d'une fonction à deux variables

1) Définition

- D7** : On appelle fonction à deux variables une correspondance qui, à tout couple $(x; y)$ de réels appartenant chacun à un intervalle de $\mathbb{R}$, associe le réel z , noté $h(x; y)$. On appelle surface représentative de h l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y; z)$ tels que $z = h(x; y)$.
- Exemple** : Si on pose $h(x; y) = 2x - 3y + 4$, la surface est le plan d'équation : $2x - 3y - z + 4 = 0$

2) Autres surfaces

- **P5** : Si on pose

$$h(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

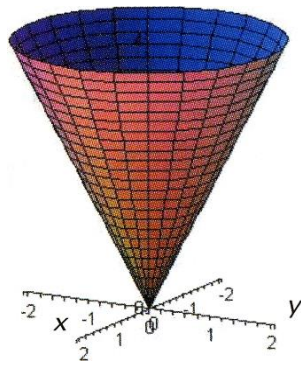
la surface est le
« demi-cône »

d'équation :

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ donc}$$

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ et } z \geq 0.$$

(ici, $\alpha = \frac{\pi}{2}$)



- **D8** : Si on pose

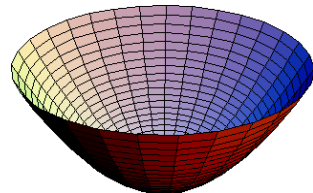
$$h(x; y) = x^2 + y^2,$$

la surface correspondante
est le

parabolôide de révolution

d'équation : $z = x^2 + y^2$,

qui sert de forme aux
antennes dites
« paraboliques ».



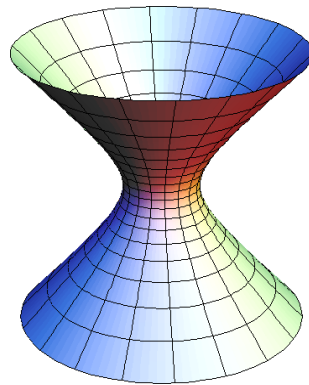
- **D9** : La surface d'équation
 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ est un

hyperboloïde
de révolution
à une nappe.

Si on pose

$$h(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1},$$

cette surface est la réunion
des surfaces
représentatives des
fonctions h et de $-h$.
C'est la forme donnée à
certains châteaux d'eau et
centrales diverses.



IV) Sections planes de quelques surfaces

- 1) **Définitions** : Soit (S) une surface et (P) un plan.

- **D10** : On appelle section plane de (S) par (P)
l'intersection de (S) et de (P) .

- **D11** : On appelle sections horizontales de (S) les
sections planes parallèles au plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- **Remarque** : La section horizontale de la surface
d'équation $z = h(x; y)$ par le plan d'équation $z = k$
s'appelle la ligne de niveau k de la fonction h .

- **D12** : On appelle sections
verticales de (S)
les sections planes parallèles à
la droite $(O; \vec{k})$.

- **D13** : On appelle génératrices
de (S) les droites contenues
dans (S) .

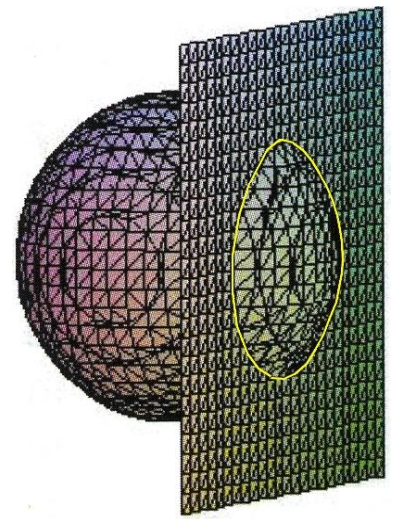
- **Exemple** : La photo ci-contre
montre quelques génératrices
d'un hyperboloïde de révolution
à une nappe, armatures d'un
château d'eau.



2) Sections planes de sphères

- **P6** : Les sections
planes d'une
sphère de centre Ω
et de rayon R sont :

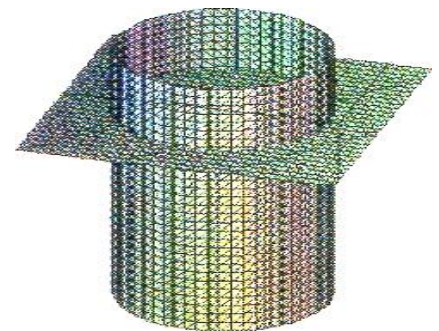
- l'ensemble vide
si le plan est à une
distance d de Ω
strictement
supérieure à R
- un point s'il y a
tangence,
c'est-à-dire si $d = R$
- un cercle si $d < R$



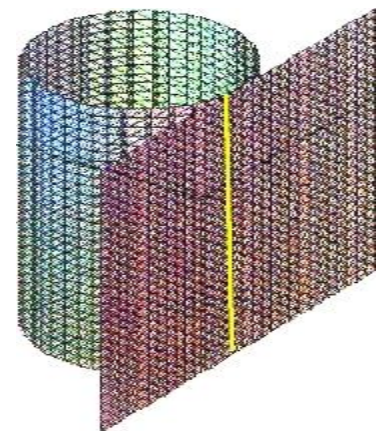
3) Sections planes de cylindres

- Soit un **cylindre de révolution** d'axe la droite
 $(D) = (O; \vec{k})$ et de rayon R .

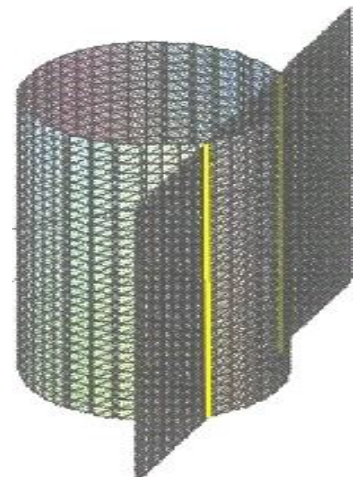
- **P7** : Les
sections
horizontales
sont des cercles
de rayon R dont
les centres sont
sur (D) .



- **P8** : Les
sections
verticales sont :
- l'ensemble vide
si (P) est à une
distance d de
 (D) strictement
supérieure à R
- une droite
parallèle à (D)
s'il y a
tangence,
c'est-à-dire si
 $d = R$

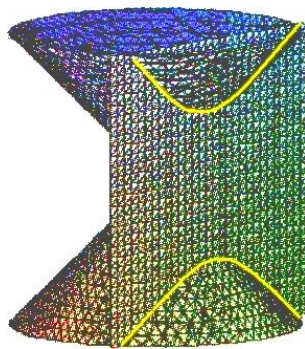
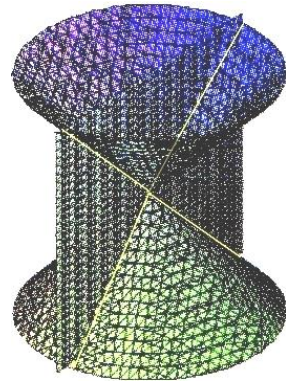
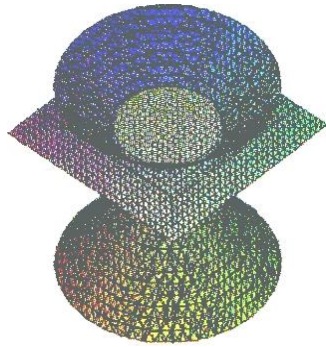


- la réunion de
deux droites
parallèles à (D)
si $d < R$



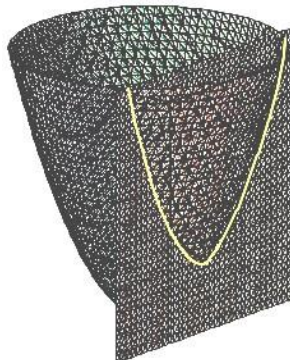
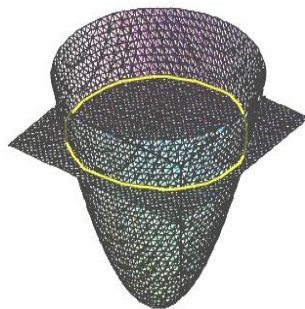
4) Sections planes de cônes

- Soit le **cône de révolution** d'axe la droite $(D) = (O; \vec{k})$ et d'équation $x^2 + y^2 - a^2 z^2 = 0$.
- **P9** : Les sections horizontales avec le plan d'équation $z = h$ sont :
 - le point O , sommet du cône, lorsque $h = 0$
 - le cercle de centre de coordonnées $(0; 0; h)$ et de rayon $|ah|$ si $h \neq 0$
- **P10** : Les sections verticales avec un plan parallèle à l'axe $(O; \vec{k})$, d'équation $ax + by + c = 0$ sont :
 - la réunion de deux droites sécantes en O si $c = 0$
 - une hyperbole si $c \neq 0$



5) Sections planes de paraboloïdes de révolution

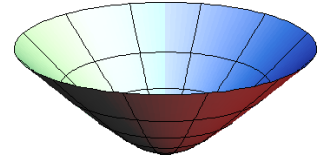
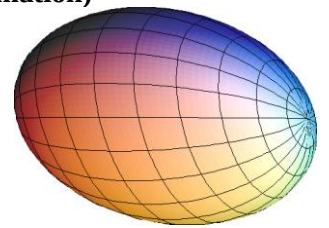
- Soit la **paraboloïde de révolution** d'axe la droite $(D) = (O; \vec{k})$ et d'équation $x^2 + y^2 = az$, ($a > 0$).
- **P11** : Les sections horizontales avec le plan d'équation $z = h$ sont :
 - l'ensemble vide lorsque $h < 0$,
 - le point O , sommet du cône, lorsque $h = 0$,
 - le cercle de centre de coordonnées $(0; 0; h)$ et de rayon $\sqrt{ah}$ si $h > 0$
- **P12** : Les sections verticales sont des paraboles.



V) Quelques autres surfaces et leurs équations (pour information)

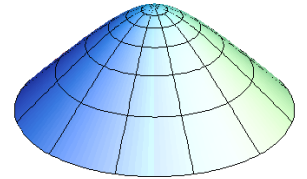
- **Ellipsoïde de révolution** (ou « ballon de rugby ») :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



- **Hyperboloïde de révolution à deux nappes**

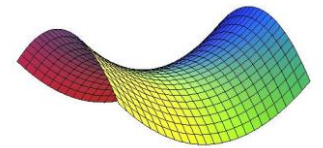
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



- **Paraboloïde hyperbolique** (ou « selle de cheval »)

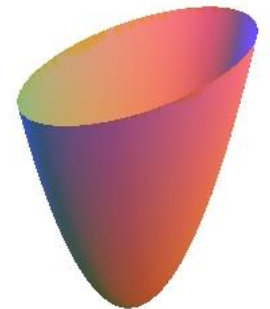
Selon le repère :

$$\frac{z}{h} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \text{ ou } xy = pz$$



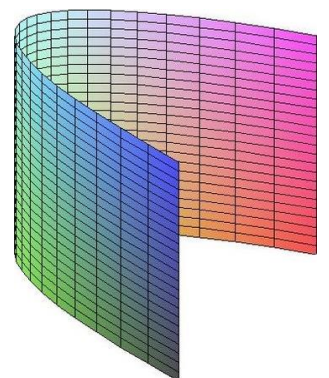
- **Paraboloïde elliptique**

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



- **Cylindre parabolique**

$$y = \frac{x^2}{2p}$$



- **Cylindre hyperbolique**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

