

SUITES NUMÉRIQUES

Récurrence – Exemples – Propriétés

I) Définition et détermination d'une suite

- **D1** : Une suite numérique est une fonction dont l'ensemble de départ est $\mathbf{N}$ ou une partie de $\mathbf{N}$.
- Déterminer une suite, c'est fournir un moyen d'en calculer tous les termes.

a) Détermination explicite

- On donne une formule permettant d'avoir directement toutes les valeurs de la suite, par exemple une application f de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ dont la suite est la restriction à I : Ainsi, pour tout $n \geq 0$, $u_n = f(n)$.
- **Exemples** :
 - Pour tout $n \geq 0$, $u_n = 3n - 2$.
 - Pour tout $n \geq 1$, u_n est la n -ième décimale de π .

E1 : Déterminer la valeur de u_5 , puis le 3^e terme, puis la formule donnant u_{2n+1} dans les cas suivants :

a) Pour tout $n \geq 4$, $u_n = 3n - 20$.

b) Pour tout $n \geq 0$, $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

b) Détermination récurrente sur deux termes

- Donnée du premier terme de la suite et d'une relation de récurrence, c'est-à-dire d'une fonction g , définissant une relation entre deux termes consécutifs de la suite sous la forme : Pour tout n , $u_{n+1} = g(u_n)$.

E2 : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

- a) Calculer valeurs exactes et approchées de u_1 et u_2 .
- b) Sur le dessin en annexe est représentée la fonction g définie sur $[0 ; 4]$ par $g(x) = \sqrt{x + 6}$.

Compléter la figure pour représenter graphiquement des premiers termes de la suite.

- c) Construire un algorithme avec une boucle « Pour » pour calculer le n -ième terme de la suite.

c) Exemples classiques de suites ayant à la fois une écriture explicite et récurrente

- **P1** : Suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r : pour tout n , $u_{n+1} = u_n + r$.

On a alors, pour tout n , $u_n = u_0 + nr$.

- **P2** : Suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q : pour tout n , $u_{n+1} = q \times u_n$.

On a alors, pour tout n , $u_n = u_0 \times q^n$.

- **P3** : Suite factorielle

$u_0 = 1$ et, pour tout n , $u_{n+1} = (n+1) \times u_n$.

On a alors, pour tout $n > 0$, $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$, que l'on note $n!$ et qui se lit « factorielle n ».

On pose par convention $0! = 1$.

- **Premières valeurs**

n	0	1	2	3	4	5	6
$n!$							

- d) **Exemple classique** de suite ayant une écriture récurrente et dont on peut déterminer une écriture explicite grâce aux suites précédentes

P4 : Suite arithmético-géométrique

$$u_0 = \alpha \text{ et, pour tout } n, u_{n+1} = a u_n + b.$$

Les suites arithmétiques et les suites géométriques en sont des cas particuliers.

On peut déterminer leurs écritures explicites grâce à des suites du type $v = (u_n + \lambda)$ que l'on montre être arithmétiques ou géométriques.

La valeur de λ sera en général donnée.

E3 : Soit la suite vérifiant : $u_0 = 0$ et,

$$\text{pour tout } n \geq 0, u_{n+1} = -3u_n + 8.$$

On pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que v est une suite géométrique. Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

e) Détermination récurrente sur trois termes

- Donnée des deux premiers termes et d'une relation de récurrence du type $u_{n+2} = g(u_n ; u_{n+1})$.

- **Exemple historique**, la suite de Fibonacci

$$u_0 = u_1 = 1, \text{ pour tout } n \geq 0, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

E4 : Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout n de $\mathbf{N}$, $u_{n+2} = 10 u_{n+1} - 9 u_n$

a) Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

b) Soit (v_n) la suite définie pour tout n de $\mathbf{N}$ par :

$$v_n = u_{n+1} - u_n.$$

Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

Calculer v_n , puis u_n en fonction de n .

II) Raisonnement par récurrence

- a) **D2** : Pour démontrer une propriété P concernant des entiers de $A = [n_0 ; +\infty[\cap \mathbf{N}$, avec $n_0 \in \mathbf{N}$, on peut utiliser l'axiome d'induction, qui est l'un des axiomes permettant la définition de l'ensemble $\mathbf{N}$.
- Pour prouver par récurrence sur n que « Pour tout n de A , P_n est vraie », on montre que les deux propriétés suivantes sont simultanément vérifiées :

- La propriété P est vraie pour n_0 (c'est l'amorçage ou l'initialisation).
- Si on suppose que, pour un certain entier $k \geq n_0$, la propriété P_k est vraie, alors on doit montrer que la propriété P_{k+1} est vraie (principe d'hérédité).

- **Remarque** : Ne pas confondre la démonstration de la propriété « P_n est vraie » avec le fait de montrer que l'implication $(P_k \Rightarrow P_{k+1})$ est vraie.

- b) **Utilisation** : En pratique, pour la deuxième partie de la démonstration, on prend comme hypothèse que, pour un certain k , quelconque mais fixé ($k \geq n_0$), la proposition P_k est vraie (l'hypothèse de récurrence). Puis, grâce à cette hypothèse et aux propriétés de P_k , permettant de faire un lien entre P_k et P_{k+1} (qu'on appelle la formule de passage ou l'hérédité), on montre P_{k+1} (la conclusion de récurrence).

E5 : Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

a) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ b) $3^n \geq 1 + 2n$

E6 : Calculer les premiers termes de la suite u pour conjecturer une formule explicite que l'on démontrera

par récurrence : pour tout $n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$.

c) Autre type de raisonnement

- **D3 :** Cette méthode de démonstration est aussi appelée « récurrence de premier ordre » ou « simple » car on définit aussi une « récurrence de second ordre » ou « forte » en remplaçant la deuxième partie du raisonnement par :

Si on suppose que, pour un certain entier $k \geq n_0$,
tous les P_i sont vraies pour tout $i \leq k$, alors on
montre que P_{k+1} est vraie aussi.

- C'est-à-dire qu'ici, on suppose la proposition vraie du rang n_0 jusqu'au rang k pour démontrer P_{k+1} .
- **Remarque :** Il peut être nécessaire, selon la propriété à prouver, de démontrer l'amorce sur plus d'un terme.

E7 : Une suite u est définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = a$,
et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2$.

- a) Calculer les quatre valeurs suivantes de la suite u .
b) Conjecturer une formule explicite et la démontrer par récurrence.

III) Qualités classiques d'une suite

a) Suite croissante, suite décroissante

- **D4 :** La suite u est une suite croissante si et seulement si, pour tout n de I , $u_{n+1} - u_n \geq 0$
- On a de même :
 - décroissante si et seulement si $u_{n+1} - u_n \leq 0$
 - constante si et seulement si $u_{n+1} - u_n = 0$
 - strictement croissante si et seulement si :
$$u_{n+1} - u_n > 0$$
 - strictement décroissante si et seulement si :
$$u_{n+1} - u_n < 0$$
- **P5 :** Lorsque u est une suite strictement positive, elle est croissante (resp. décroissante) si et seulement si :
pour tout n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (resp. $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$).
- Cette propriété est parfois intéressante pour une suite définie par une récurrence sous forme de produit.
- **D5 :** Les suites croissantes et les suites décroissantes se regroupent sous le terme de suites monotones.
- Dans le cas de suites déterminées par une formule explicite du type $u_n = f(n)$, on peut étudier leur variation par l'étude de la variation de f , ou sinon le signe de $u_{n+1} - u_n$.

E8 : Étudier la monotonie de la suite définie par :

a) Pour tout $n \geq 0$, $u_n = -n^2 + 4n$.

b) Pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = 2^n - n$.

- Dans le cas de suites déterminées par une récurrence du type $u_{n+1} = g(u_n)$, on étudie habituellement le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- **P6 :** Lorsque g est monotone,
 - ✓ Si la fonction g est croissante, on montre que $u_{n+2} - u_{n+1}$ a même signe que le $u_{n+1} - u_n$.
En déterminant le signe de $u_1 - u_0$, on montre alors par récurrence que la suite est monotone.
 - ✓ Si g est décroissante, alors la suite u est alternée.

E9 : Étudier la variation des suites définies par :

a) $u_n = \frac{5 \times 3^n}{2^{2n+1}}$ b) $v_n = \frac{3^n - 7^n}{3^n + 7^n}$

c) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

b) Suite majorée – suite minorée

- **D6 :** Une suite est dite majorée (respectivement minorée) par un réel A si et seulement si, pour tout n de I , $u_n \leq A$ (respectivement $u_n \geq A$).
- Elle est dite bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée. Les réels A sont appelés des majorants (respectivement des minorants).
- **P7 :** Si A est un majorant, tout réel supérieur à A est aussi un majorant ; si A est un minorant, tout réel inférieur à A l'est aussi. Ainsi, on retiendra que les minorants et majorants ne sont donc pas uniques.
- **P8 :** Une suite croissante (resp. décroissante) est minorée (resp. majorée) par son premier terme.

E10 : a) Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = \frac{6}{4 - u_n} - 1 \end{cases}$.

Montrer que pour tout entier n , $1 \leq u_n \leq 2$.

b) Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} \end{cases}$.

Montrer que pour tout entier n , $1 \leq u_n \leq 2$.

c) Suite périodique

- **D7 :** Soit un entier $p > 0$. On dit que u est périodique de période p si et seulement si :
pour tout n , $u_{n+p} = u_n$.
- La plus petite période (positive) de la suite est appelée la période, on dit que la suite est p-périodique.
- Une suite 1-périodique est une suite constante ou encore stationnaire à partir du premier rang.

E11 : Soit a et b deux réels donnés.

Soit u la suite définie par : $u_0 = a$, $u_1 = b$ et,

pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Montrer que u est une suite périodique de période 6.