SUITES NUMÉRIQUES
Convergence – Divergence

I) Convergence

a) Vocabulaire : Soit *u* une suite *infinie* (c'est-à-dire que l'ensemble d'indices *I* a une infinité d'éléments). On dit qu'elle est *convergente* (ou qu'elle *converge*) vers le réel *L* si et seulement si u_n admet pour limite (finie) le réel *L* lorsque *n* tend vers +∞.

- **D1** : La suite $(u_n)_{n\in I}$ converge vers *L* si et seulement si tout intervalle du type $]L-\varepsilon\,;L+\varepsilon[$, avec $\varepsilon>0$, contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
- C'est-à-dire, en langage mathématique :
$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists\, n_0\in I,\ \forall n\in I,\ n\geq n_0 \Rightarrow |u_n-L|<\varepsilon}$$
- **Notations** : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ ou $\lim\limits_{+\infty} u = L$ ou $\lim u = L$.
Il n'est pas obligatoire d'indiquer que *n* tend vers $+\infty$.

E1 : Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

b) Propriétés de base
- **P1** : La limite d'une suite convergente est unique.
- **P2** : Une suite (u_n) converge vers *L* si et seulement si la suite (u_n-L) converge vers 0.
- **P3** : Toute suite convergente est bornée.
Attention ! la réciproque est fausse.
- **Contre-exemple** : La suite $\left((-1)^n\right)$

c) Opérations sur les suites convergentes
(Voir formulaire spécifique)

d) Convergence par comparaison
- **P4** : Si une suite est positive et convergente vers un réel *L*, alors $L\geq 0$.
- **Remarque** : Si la suite est strictement positive et convergente, la limite peut tout de même être nulle.
Exemple : La suite $u=\left(\dfrac{1}{n}\right)$, pour $n\geq 1$.
- **P5** : Si une suite convergeant vers *L* est majorée par le réel *M* (respectivement minorée par le réel *m*), alors $L\leq M$ (respectivement $L\geq m$)
- **P6** : Si *u* et *v* sont deux suites qui convergent respectivement vers *L* et *L'*, et qui vérifient, à partir d'un certain rang, $u_n\geq v_n$, alors $L\geq L'$.
- **Attention !** Si $u_n>v_n$, alors on a seulement $L\geq L'$ et non obligatoirement $L>L'$.
- **Exemple** : Les suites $u=\left(\dfrac{2}{n}\right)$ et $v=\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

- **T1** : **Théorème d'encadrement**
Si, à partir d'un certain rang, une suite est encadrée par deux suites convergeant vers la même limite *L*, alors elle converge et sa limite est aussi *L*.
$$\forall n\geq n_0, u_n\leq v_n\leq w_n$$
avec $\lim u = L$ et $\lim w = L$, alors $\lim v = L$
On parle aussi de « *Théorème des Gendarmes* »

E2 : a) Montrer que, pour tout entier *n* strictement positif,
$$\frac{3n-6}{2n}\leq\frac{3n-1}{2n+3}\leq\frac{3n-2}{2n}.$$
b) En déduire la convergence et la limite de la suite définie par : Pour tout $n\geq 1$ $u_n=\dfrac{3n-1}{2n+3}$.

II) Divergence

a) Définition
- **D2** : Une suite qui n'est pas convergente est appelée une suite *divergente*.
- Deux cas de divergence peuvent se présenter :
  - la suite n'admet pas de limite, comme par exemple : $\left((-1)^n\right),\left((-2)^n\right),(\cos n),\left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right)$...
  - la suite admet pour limite –∞ ou +∞, comme par exemple : $(2n+1)$, $\left(-n^2\right)$, $\left(n^2+3\right)$, $\left(2^n\right)$...

On s'intéressera plus à ce deuxième cas de divergence.

E3 : Montrer que ces suites ne convergent pas :
a) u_0 = 1 et, pour tout $n\geq 0$, $u_{n+1}=u_n+2$.
b) u_0 = 2 et, pour tout $n\geq 0$, $u_{n+1}=-\dfrac{1}{u_n}$
c) u_0 = 3 et, pour tout $n\geq 0$, $u_{n+1}=2u_n+3$

b) Traductions
- **D3** : La suite $(u_n)_{n\in I}$ *diverge vers +∞* si et seulement si tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty[$, avec *A* > 0, contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang (ici n_0). Donc, en langage mathématique :
$$\boxed{\forall A>0,\ \exists\, n_0\in I,\ \forall n\in I,\ n\geq n_0 \Rightarrow u_n>A}$$
- **D4** : De même, la suite $(u_n)_{n\in I}$ diverge vers –∞ si et seulement si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty\,;-A[$, avec *A* > 0, contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
- Donc, en langage mathématique :
$$\boxed{\forall A>0,\ \exists\, n_0\in I,\ \forall n\in I,\ n\geq n_0 \Rightarrow u_n<-A}$$

c) Divergence par comparaison

Théorèmes de comparaison :
- **T2** : Si une suite *u* est supérieure à partir d'un certain rang à une suite *v* qui diverge vers +∞, alors *u* diverge elle aussi vers +∞.
- **T3** : Idem avec « inférieure » et « diverge vers –∞ ».

E4 : a) Montrer que si α est un réel positif alors pour tout entier positif *n*, $(1+\alpha)^n\geq 1+n\alpha$.
b) En déduire que les suites $\left(q^n\right)$ avec *q* strictement supérieure à 1 sont des suites divergentes vers $+\infty$.
c) Montrer que les suites géométriques de raisons strictement comprises entre –1 et 1 convergent vers 0.
d) Soit *u* une suite strictement positive vérifiant :
Il existe un réel *k* de]0 ; 1[tel que, pour tout entier positif *n*, $u_{n+1}\leq k\,u_n$.
Montrer qu'alors la suite *u* tend vers 0.

E5 : On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

b) Quelle est la limite de (u_n) ?

3) a) Calculer u_1, u_2 et u_3. Conjecturer alors une expression de u_n en fonction de n.

b) Démontrer la propriété ainsi conjecturée.

III) Suites monotones et convergence

a) Propriétés de base

- **P7** (admise)
  Toute suite croissante et majorée est convergente.
  Toute suite décroissante et minorée est convergente.

- **Remarque :** Les deux propriétés **P7** ne sont en fait qu'une seule propriété : si la suite u vérifie l'une des deux, alors la suite $-u$ vérifie l'autre.
- **P8** : Une suite croissante et convergente est majorée par sa limite. Idem pour décroissante et minorée.

b) Méthode pratique

- On utilise ces propriétés dans le cas de suites définies par récurrence, car dans le cas d'une détermination explicite, il est en général plus simple d'étudier directement la limite de la fonction correspondante.
- Les propriétés **P7** permettent de prouver l'existence de la limite, mais ne permettent pas de déterminer par le calcul la limite elle-même.
- **P9** : On peut utiliser alors la propriété suivante :
  Si la suite est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = g(u_n)$, on peut utiliser le théorème de calcul, et non d'existence suivant :

Si la fonction g est définie sur un intervalle I tel que :
- Si x appartient à I, $g(x)$ appartient à I, ce qu'on peut traduire par : $g(I) \subset I$,
- Si u est convergente, et qu'on note L sa limite,
- Si les opérations sur les limites permettent de vérifier que la limite de $g(u_n)$ quand u_n tend vers L est bien $g(L)$, alors L est une solution de l'équation $g(x) = x$.

- Si l'équation $g(x) = x$ admet des solutions, cela ne prouve pas que la suite converge, mais que, si elle converge, la limite est l'une de ces solutions.
  En revanche, l'inexistence ou l'illogisme des solutions prouve que la suite ne converge pas.
- **Exemple** : Soit la suite u vérifiant $u_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = -2u_n + 1$.
  Si la suite converge, alors sa limite L vérifie
  $L = -2L + 1$, donc $L = \frac{1}{3}$.
  Mais cela ne prouve pas que la suite converge ; cela prouve seulement que **si** la suite converge, **alors** sa limite est $\frac{1}{3}$.
  En fait, cette suite n'a pas de limite...

E6 : La suite (u_n) est définie sur **N** par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{u_n} \end{cases}$$

a) Démontrer que, pour tout n de **N**, $2 \leq u_n \leq 3$.

b) Montrer que (u_n) est une suite croissante.

c) Montrer que (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

E7 : Soit u_0 et v_0 deux réels vérifiant : $u_0 > v_0 > 0$.
Soit u et v deux suites définies par :
Pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

a) Démontrer que l'une des suites est croissante, inférieure pour tout rang à l'autre, qui est décroissante, et que la suite différence tend vers 0.

b) En déduire que les deux suites convergent.

c) Montrer que la suite $u \times v$ est constante.

d) Déterminer alors la limite commune des deux suites.

IV) Suites monotones et divergence

- **D5 :** On dira assez logiquement qu'une suite est non majorée lorsqu'elle n'est pas majorée…
- À partir de cette évidence, il faut savoir traduire cette propriété en langage mathématique :
- On rappelle qu'une suite u est majorée lorsque :
  $$\exists M \in \mathbf{R},\ \forall n \in I, u_n \leq M$$
- Une suite u est donc non majorée lorsque :
  $$\forall M \in \mathbf{R},\ \exists n \in I, u_n > M$$
- Définition similaire pour une suite non minorée :
  $$\forall M \in \mathbf{R},\ \exists n \in I, u_n < M$$
- On a alors les deux théorèmes suivants :

- **P10** : Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- De même, toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

E8 : Soit (u_n) la suite définie sur **N** par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = 1 + \frac{5}{4}u_n$$

a) Montrer que (u_n) est croissante.

b) On suppose que (u_n) converge, quelle est alors sa limite L ?

c) Montrer que $\lim u_n = +\infty$.

E9 : Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier n non nul par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$.

a) Montrer les suites (u_n) et (v_n) vérifient :
l'une est croissante, l'autre décroissante,
leur différence est de signe constant et tend vers 0.

b) Montrer qu'elles convergent et donner une valeur approchée de leurs limites à 10^{-3} près.

(On dit que ces suites sont adjacentes.)