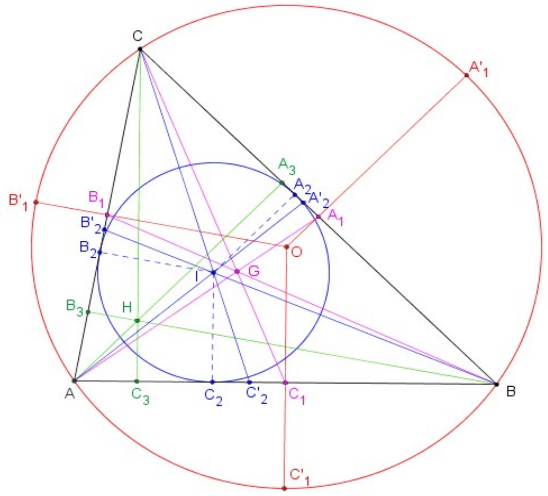
QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE

De certaines formules, on peut en déduire deux autres, par permutation circulaire des notions liées à A, B et C.

I) Vocabulaire et propriétés de base



a) Angles et côtés

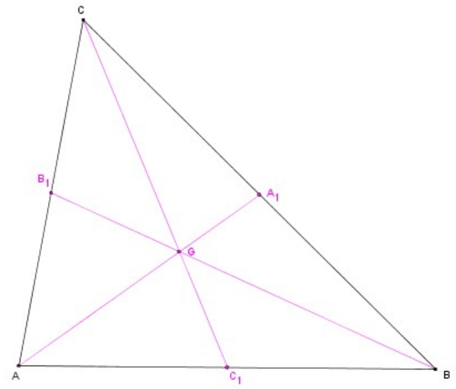
Sommets : A, B et C	Longueurs des côtés : $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$
Angles aux sommets: $\alpha = \widehat{CAB}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{BCA}$	Demi-périmètre : p Aire : S
Axiome : $\alpha + \beta + \gamma = \pi$	
Relation d'Al-Kashi[1] / formule du cosinus : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$	
$c = b\cos\alpha + a\cos\beta$	
Formule du sinus : $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$	
$\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ et $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$	
$S = \dfrac{1}{2}\left\lvert \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right\rvert = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$	
Formule de Héron[2] : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	

(1) *Ghiyath Al-Kashi, arabe (Iran), 1380–1429*
(2) *Héron d'Alexandrie, grec, environ 100 apr. J.-C.*

b) Médianes

A_1, B_1 et C_1, milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$

Médianes : (AA_1),(BB_1) et (CC_1)

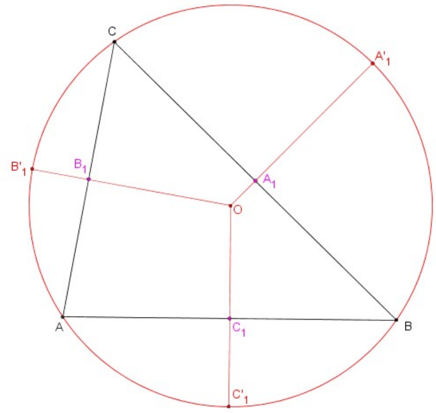


- Les trois médianes sont concourantes au point, noté G, qui est appelé *centre de gravité* du triangle (ABC).

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (G isobarycentre de A, B et C)
$\overrightarrow{AB} = -2\,\overrightarrow{A_1B_1}$ donc $(AB)\,//\,(A_1B_1)$
$\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} = 2\,\overrightarrow{GA_1}$
$AA_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}$

c) Médiatrices

Médiatrices : perpendiculaires à (BC) (respectivement (CA), (AB)) passant par A_1 (respectivement B_1, C_1)

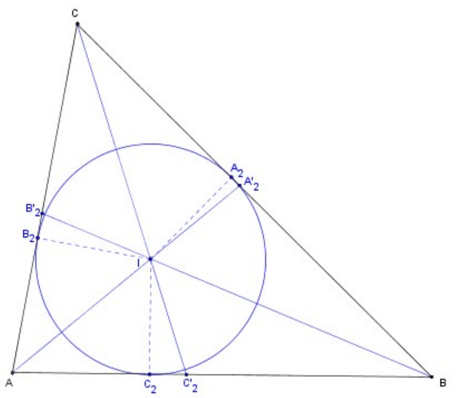


- Les trois médiatrices sont concourantes au point, noté O, appelé *centre du cercle circonscrit* du triangle (ABC), qui vérifie $OA = OB = OC$
- Le cercle de centre O passant par A passe aussi par B et C ; c'est le *cercle circonscrit* du triangle (ABC) ; son rayon est noté R.
- Intersections des demi-médiatrices $[OA_1)$, $[OB_1)$ et $[OC_1)$ avec le cercle circonscrit : A_1', B_1' et C_1'.

$R = OA_1' = \dfrac{S}{c\sin\alpha\sin\beta} = \dfrac{a}{2\sin\alpha} = \dfrac{abc}{4S}$
$OA_1 = \dfrac{a}{2}\lvert\cot\alpha\rvert$ (cotangente $\cot = \dfrac{1}{\tan}$)
$A_1A_1' = \dfrac{a}{2}\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{a(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha}$

d) Bissectrices intérieures

Bissectrices intérieures : droites passant par A (respectivement B, C) et coupant l'angle au sommet correspondant en deux angles de même mesure, en passant à l'intérieur du triangle.



- Pieds des bissectrices intérieures : A_2', B_2' et C_2'
- Projetés orthogonaux de I sur les côtés : A_2, B_2 et C_2
- Les trois bissectrices intérieures sont concourantes en un point, noté I, appelé *centre du cercle inscrit* du triangle (ABC), vérifiant $IA_2 = IB_2 = IC_2$
- Le cercle de centre I tangent au côté (BC) (en A_2) et aussi tangent aux côtés (CA) et (AB) ; c'est le *cercle inscrit* du triangle (ABC) ; son rayon est noté r

$a\overrightarrow{C_2'A} + b\overrightarrow{C_2'B} = \vec{0}$ donc $\dfrac{\overline{C_2'A}}{\overline{C_2'B}} = -\dfrac{b}{a}$
$a\,\overrightarrow{IA} + b\,\overrightarrow{IB} + c\,\overrightarrow{IC} = \vec{0}$
$OA_1 + OB_1 + OC_1 = R + r$
$a\,\overrightarrow{IA_2} + b\,\overrightarrow{IB_2} + c\,\overrightarrow{IC_2} = \vec{0}$
Formule d'Euler[3] : $OI^2 = R(R-2r)$
$r = \dfrac{S}{p} = (p-a)\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{a}{\cot\left(\dfrac{\beta}{2}\right) + \cot\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)}$

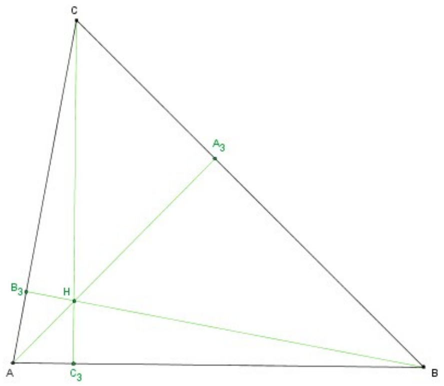
[3] *Leonhard Euler, suisse, 1707–1783*

$A_2B_2 = 2r\cos\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$ et $BA_2' = \dfrac{ac}{b+c}$
$AI = \dfrac{r}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{2a\sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)}$
$AA_2' = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}}{b+c}$
$AB_2 = AC_2 = p - a = r\cot\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

e) Hauteurs

Hauteurs : perpendiculaires à (BC) (respectivement (CA), (AB)) passant par A (respectivement B, C).

Pieds des hauteurs : A_3, B_3 et C_3.

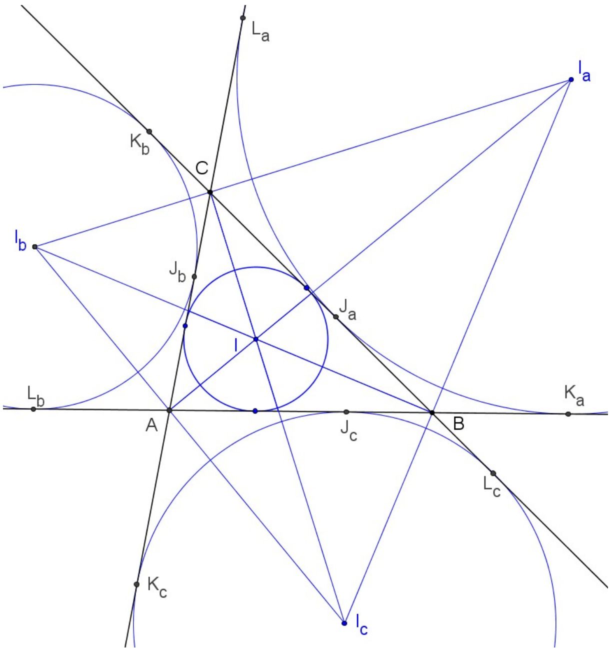


- Les trois hauteurs sont concourantes en un point, noté H, qui est appelé l'*orthocentre* du triangle (ABC)

$AH = a\cot\alpha = b\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}$
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GO}$
$AH \times HA_3 = 4R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
$HA_3 = a\dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$
$AB_3 = b\dfrac{\sin\gamma\cos\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)} = a\dfrac{\sin\gamma}{\tan\alpha}$
$h_a = AA_3 = \dfrac{2S}{a} = b\sin\gamma = \dfrac{bc}{a}\sin\alpha = \dfrac{bc}{2R} = a\dfrac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$
$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$

f) Bissectrices extérieures

- <u>*Bissectrices extérieures*</u> : droites passant par A (respectivement B, C) et perpendiculaires à la bissectrice intérieure correspondante.



- La bissectrice intérieure issue de A (resp. B, C) et les deux bissectrices extérieures issues de B et de C (resp. C et A, A et B) sont concourantes en un point noté I_a (resp. I_b, I_c), appelé le <u>*centre du cercle exinscrit*</u> en A (resp. B, C) au triangle (ABC).
- Le cercle de centre I_a (resp. I_b, I_c) tangent au côté (BC) et aussi tangent aux côtés (CA) et (AB) ; c'est le <u>*cercle exinscrit*</u> en A du triangle (ABC) ; son rayon est r_a (resp. r_b, r_c).
- Points de tangence du cercle de centre I_a avec (BC) : J_a ..., avec (AB) : K_a ..., avec (CA) : L_a ...

$$-a\,\overrightarrow{I_aA}+b\,\overrightarrow{I_aB}+c\,\overrightarrow{I_aC}=\vec{0}$$

$$AK_a=AL_a=p$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\quad\text{et}\quad\frac{1}{r_a}=-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

$$r_a=p\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{S}{p-a}\quad\text{et}\quad r_ar_br_c=p^2r$$

$$AJ_b=AL_b=BJ_a=BK_a=p-c$$

$$r_a+r_b+r_c=4R+r\quad\text{et}\quad r_ar_b+r_br_c+r_cr_a=p^2$$

$$r_a^2+r_b^2+r_c^2+a^2+b^2+c^2=16R^2-r^2$$

$$OI^2+OI_a^2+OI_b^2+OI_c^2=12R^2$$

$$S=\sqrt{rr_ar_br_c}=\frac{r_ar_br_c}{\sqrt{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}}$$

g) Égalités trigonométriques

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{p}{R}$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{r}{4R}$$

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{2S}{R^2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=$$
$$1+4\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)=1+\frac{r}{R}$$

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{r}{p}=\frac{S}{p^2}$$

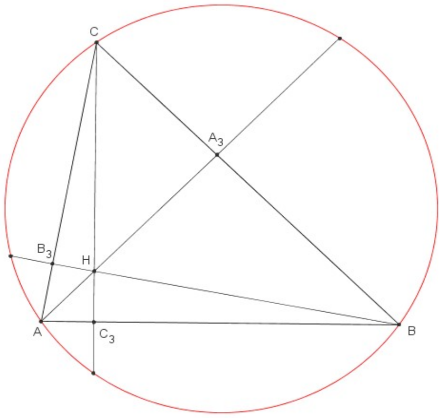
$$\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma=\frac{2}{RS}OA_1\times OB_1\times OC_1$$
$$=\frac{1}{4RS}AH\times BH\times CH$$
$$=\frac{4}{R^2S^2}Aire\,(ABO)\times Aire\,(BCO)\times Aire\,(CAO)$$

$$\cot\alpha\cot\beta+\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha=1$$

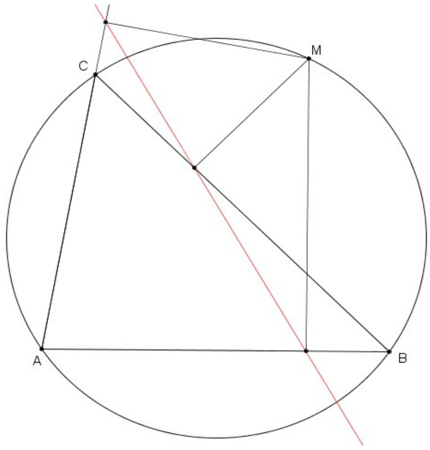
$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cot\left(\frac{\beta}{2}\right)+\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cot\left(\frac{\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$=\frac{p^2}{S}=\frac{p}{r}=\frac{S}{r^2}=\frac{p^3}{r_ar_br_c}$$
$$=\frac{AB_2\times BC_2\times CA_2}{r^3}=\frac{RS}{2A_1A_1'\times B_1B_1'\times C_1C_1'}$$

h) Autres propriétés

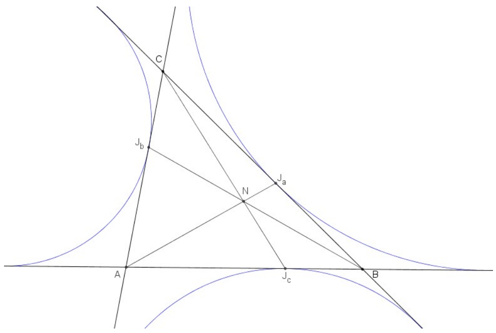
- A, I, A_2', A_1' et I_a sont alignés.
- H est le seul point dont les symétriques par rapport aux côtés soient sur le cercle circonscrit.



- Le point I, centre du cercle inscrit, est l'unique solution de l'équation : $aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = abc$
- Les milieux des segments joignant deux quelconques des quatre centres des cercles inscrit et exinscrits sont sur le cercle circonscrit.
- Les projetés orthogonaux sur les côtés d'un point M du cercle circonscrit sont alignés sur une droite dite <u>*droite de Simson*</u>[4] (ou <u>*droite de Wallace*</u>[5]) associée à M. Les points M et l'orthocentre H sont équidistants de cette droite.

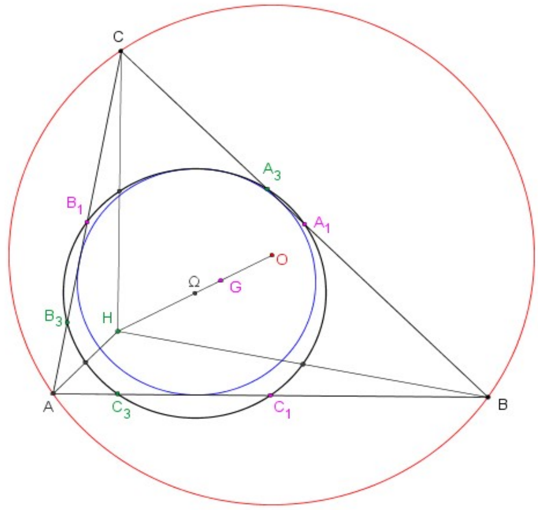


- Les droites $(AJ_a), (BJ_b)$ et (CJ_c) sont concourantes en un point N, dit <u>*point de Nagel*</u>[6].

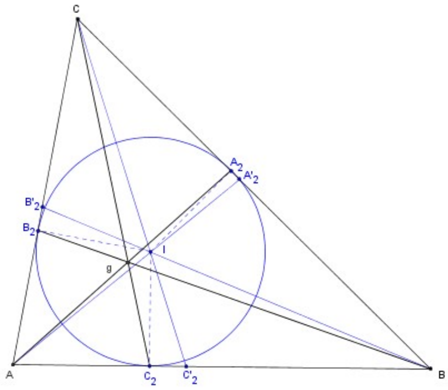


- H, G et O sont alignés sur la <u>*droite d'Euler*</u>, avec $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GO}$.

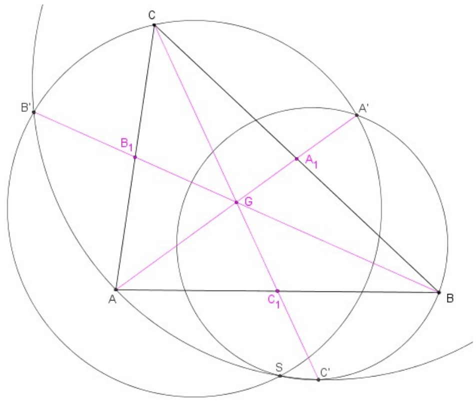
- Le cercle de centre Ω, milieu de $[OH]$ et de rayon $R/2$ est appelé le <u>*cercle d'Euler*</u> (ou <u>*de Feuerbach*</u>[7]) ; il passe par les points suivants : $A_1, B_1, C_1, A_3, B_3, C_3$ et les milieux de $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$. Il est tangent aux quatre cercles inscrit et exinscrits de (ABC), ainsi que de (AHB), (BHC) et (CHA). Il est homothétique du cercle circonscrit de centre G et de rapport $-1/2$.



- Les droites (AA_2),(BB_2) et (CC_2) sont concourantes en un point g, dit <u>*point de Gergonne*</u>[8].



- Les trois cercles passant par un sommet et les symétriques des deux autres par rapport à G sont concourants au point S dit <u>*point de Steiner*</u>[9].



---

(4) *Robert Simson, écossais, 1687–1768*
(5) *William Wallace, écossais, 1768–1843*
(6) *Christian Heinrich von Nagel, allemand, 1803–1882*

(7) *Karl Wilhelm Feuerbach, allemand, 1800–1834*
(8) *Joseph Diaz Gergonne, français, 1771–1859*
(9) *Jakob Steiner, suisse, 1796–1863*

II) Coordonnées barycentriques

a) Définition

On sait que si A, B et C sont trois points non alignés du plan, alors tout point M du plan peut être défini grâce à ces trois points. On peut ainsi définir les deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$. Les réels λ et μ sont les coordonnées de M dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right)$.

Mais grâce à la relation de Chasles[10], on a : pour tout point O, $\overrightarrow{OM} = (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{OC}$, ce qui traduit le fait que M est le barycentre de $\{(A\,;1-\lambda-\mu), (B\,;\lambda), (C\,;\mu)\}$.

Tout point du plan est barycentre de $\{(A\,;x), (B\,;y), (C\,;z)\}$, avec $x + y + z \neq 0$. Ces trois réels (non uniques) s'appellent des <u>coordonnées barycentriques</u> de M dans le repère (A, B, C).

b) Quelques propriétés

- Si M est un point du plan de coordonnées barycentriques x, y et z dans le repère (A, B, C), et si la droite (AM) est sécante avec la droite (BC) (c'est-à-dire $y+z$ non nul), alors leur point d'intersection a pour coordonnées barycentriques 0, y et z.
- Si M est un point intérieur au triangle (ABC), de coordonnées barycentriques x, y et z, positives et de somme 1 dans le repère (A, B, C), alors on a :

$$\frac{x}{Aire(MBC)} = \frac{y}{Aire(MCA)} = \frac{z}{Aire(MAB)} = \frac{1}{Aire(ABC)}.$$

c) Quelques coordonnées barycentriques

Point	1re coord.	2e coord.	3e coord.
A	1	0	0
A_1	0	1	1
A_1'	$-a^2$	$b(b+c)$	$c(b+c)$
A_2	0	$p-c$	$p-b$
A_2'	0	b	c
	0	$\sin\beta$	$\sin\gamma$
G	1	1	1
I	a	b	c
	$\sin\alpha$	$\sin\beta$	$\sin\gamma$
O	$\sin 2\alpha$	$\sin 2\beta$	$\sin 2\gamma$
H	$\tan\alpha$	$\tan\beta$	$\tan\gamma$
I_a	$-a$	b	c
	$-\sin\alpha$	$\sin\beta$	$\sin\gamma$
L	a^2	b^2	c^2
	$\sin^2\alpha$	$\sin^2\beta$	$\sin^2\gamma$
g	$\dfrac{1}{p-a}$	$\dfrac{1}{p-b}$	$\dfrac{1}{p-c}$
Ω	$2\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma$	$\tan\alpha + 2\tan\beta + \tan\gamma$	$\tan\alpha + \tan\beta + 2\tan\gamma$
	$b\cos\beta + c\cos\gamma$	$c\cos\gamma + a\cos\alpha$	$a\cos\alpha + b\cos\beta$
N	$p-a$	$p-b$	$p-c$
I_a	$-a$	b	c
J_a	0	$p-b$	$p-c$
K_a	$p-c$	$-p$	0
L_a	$p-b$	0	$-p$

d) Quelques équations barycentriques

Comme pour les coordonnées cartésiennes, un ensemble de points peut être caractérisé par une relation entre les coordonnées barycentriques de ses points ; quelques exemples :

Cercle circonscrit : $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$
Cercle inscrit : $\left((p-a)x + (p-b)y + (p-c)z\right)^2 = 2\left((p-a)^2x^2 + (p-b)^2y^2 + (p-c)^2z^2\right)$
Cercle exinscrit en A : $p^2x^2 + \left((p-c)y - (p-b)z\right)^2 = 2px\left((p-c)y + (p-b)z\right)$
Cercle d'Euler : $(b^2+c^2-a^2)x^2 + (c^2+a^2-b^2)y^2 + (a^2+b^2-c^2)z^2 = 2(a^2yz + b^2zx + c^2xy)$

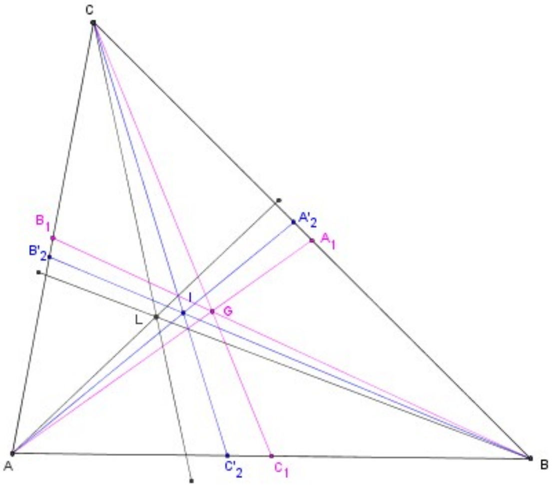
- Déterminer les équations barycentriques des droites classiques liées au triangle (côtés, céviennes [11],…)

[10] *Michel Chasles, français, 1793–1880*

[11] *On appelle céviennes d'un triangle trois droites issues des sommets et concourantes. Exemples : Les médianes, les hauteurs et les bissectrices. Du nom du mathématicien Tommaso Ceva, italien, 1648-1737.*

III) Exercice sur le point de Lemoine

- Les symétriques des médianes par rapport à aux bissectrices intérieures (appelées *symédianes*) sont concourantes en un point, dit *point de Lemoine*[12].



- Soit (ABC) un triangle. Soit α, β et γ trois réels de somme non nulle.

1) a) Soit M le barycentre de $\{(A\,;\alpha), (B\,;\beta), (C\,;\gamma)\}$. Montrer qu'il existe un réel k strictement positif pour lequel les trois réels $k|\alpha|$, $k|\beta|$ et $k|\gamma|$ sont les aires respectives des triangles (MBC), (MCA) et (MAB).

b) En déduire que les distances de M aux côtés du triangle (ABC) sont proportionnelles à $\dfrac{|\alpha|}{a}$, $\dfrac{|\beta|}{b}$ et $\dfrac{|\gamma|}{c}$.

2) Montrer que, pour tous réels a, b, c, x, y et z, on a :

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=$$

$$(x+y+z)^2+\left(\frac{xb}{a}-\frac{ya}{b}\right)^2+\left(\frac{xc}{a}-\frac{za}{c}\right)^2+\left(\frac{yc}{b}-\frac{zb}{c}\right)^2$$

3) En déduire que la somme des carrés des distances d'un point M aux trois côtés du triangle (ABC) est minimum si et seulement si $M = L$, barycentre du système $\left\{\left(A\,;a^2\right),\left(B\,;b^2\right),\left(C\,;c^2\right)\right\}$, appelé *point de Lemoine* du triangle (ABC).

4) Soit P, Q et R les pieds des bissectrices intérieures de (ABC), respectivement situés sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. À tout point M barycentre de $\{(A\,;\alpha), (B\,;\beta), (C\,;\gamma)\}$, où les trois coefficients sont positifs, on associe les trois droites suivantes : la symétrique de (AM) par rapport à (AP), la symétrique de (BM) par rapport à (BQ) et la symétrique de (CM) par rapport à (CR).

a) Montrer que ces trois droites sont concourantes au point M', barycentre du système

$$\left\{\left(A\,;\frac{a^2}{\alpha}\right),\left(B\,;\frac{b^2}{\beta}\right),\left(C\,;\frac{c^2}{\gamma}\right)\right\}.$$

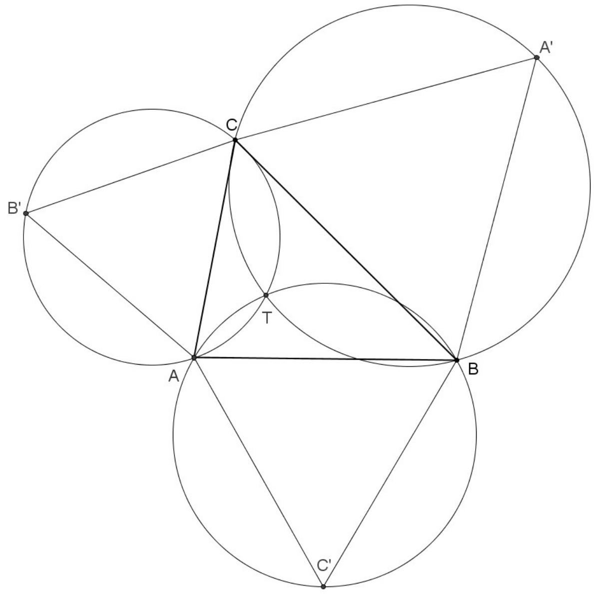
b) En déduire une construction du point de Lemoine L.

[12] *Émile Lemoine, français, 1840–1912*

IV) Exercice sur le point de Torricelli

- Si on construit sur chaque côté d'un triangle, à l'extérieur de celui-ci, un triangle équilatéral, alors les cercles circonscrits à ces trois triangles sont concourants en un point T, appelé *point de Torricelli*[13] du triangle ; ce point est le seul vérifiant :

$$\widehat{ATB}=\widehat{BTC}=\widehat{CTA}=2\pi/3\,.$$



Construction d'un réseau routier : On veut relier trois villes A, B et C par trois routes se rejoignant en un point M tel que $MA + MB + MC$ soit minimale.

- On suppose que les trois angles aux sommets du triangle (ABC) ont des mesures inférieures à $2\pi/3$ et que (ABC) est dans le sens direct. On note, pour tout point M du plan, $f(M) = MA + MB + MC$.

1) a) On suppose ici que le point M est situé dans le demi-plan de frontière (BC) et ne contenant pas A. Soit N le symétrique de M par rapport à (BC). Montrer que le fonction f ne peut être minimale en M.

b) Montrer que si M est à l'extérieur du triangle (ABC), alors la fonction f ne peut être minimale en M.

2) a) On construit à l'extérieur du triangle (ABC) les triangles équilatéraux (ACB'), (BAC') et (CBA'). Montrer que le segment $[BB']$ est dans le même demi-plan de frontière (BC) que A, et dans le même demi-plan de frontière (AB) que C (on pourra utiliser les hypothèses sur les angles du triangle).

b) En utilisant des rotations de centres respectifs A, B et C et d'angles convenablement choisis, montrer que $AA' = BB' = CC'$.

3) Soit r la rotation de centre C et d'angle $-\pi/3$. On pose alors, pour tout M, $M_1 = r(M)$.

a) Montrer que, pour tout M, $f(M) \geq BB'$ et que, $f(M) = BB'$ si et seulement si B, M, M_1 et B' sont alignés dans cet ordre.

b) Montrer qu'il existe un unique point T, que l'on précisera, vérifiant $f(T) = BB'$. Le point T est appelé le *point de Torricelli* du triangle (ABC).

4) Que peut-on dire des trois cercles circonscrits aux triangles (ACB'), (BAC') et (CBA') ?

[13] *Evangelista Torricelli, italien, 1608–1647*