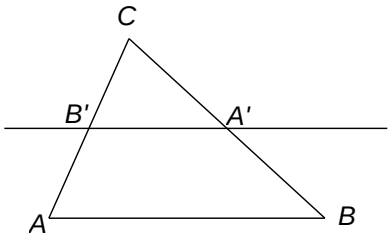
THÉORÈMES DES MILIEUX & DE THALÈS

I) Théorème des milieux

a) Propriété directe

Soit un triangle (ABC).
Soit A' le milieu de $[BC]$ et B' le milieu de $[CA]$. Alors $(A'B')$ est parallèle à (AB).

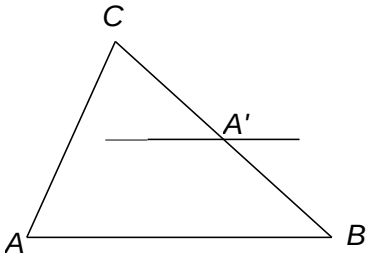


b) De plus

Le segment $[A'B']$ a pour longueur la moitié de celle de $[AB]$, c'est-à-dire : $A'B' = \frac{1}{2}AB$.

c) Réciproque du théorème

Soit un triangle (ABC). Soit A' le milieu de $[BC]$. Alors la droite passant par A' et parallèle à (AB) passe par le milieu B' de $[AC]$.

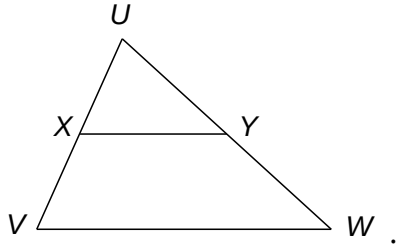


II) Théorème de Thalès

(Thalès de Millet, mathématicien grec, VI^{e} siècle av. J.-C.)

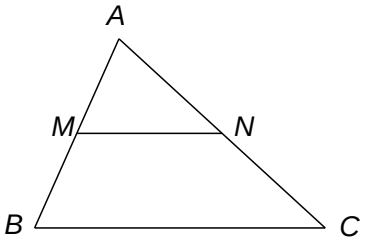
a) Grâce au théorème des milieux

Si X et Y sont les milieux respectifs de $[UV]$ et de $[UW]$, alors on a vu que : $\frac{UX}{UV} = \frac{UY}{UW} = \frac{XY}{VW} = \frac{1}{2}$



.

b) Énoncé du théorème de Thalès



Soit (ABC) un triangle quelconque.
Soit M un point de $[AB]$ et N un point de $[AC]$.
Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles,
alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

L'étude de la réciproque sera faite en Troisième.

c) Explication du théorème de Thalès

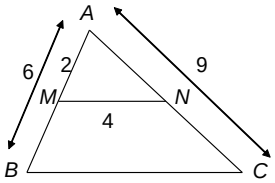
- Le théorème de Thalès traduit en Géométrie la proportionnalité avec les fractions en Algèbre.
- Ainsi, les triangles (AMN) et (ABC) ont même « forme » (mêmes angles, deux côtés portés par la même droite et leurs troisièmes côtés parallèles). On obtient les longueurs des côtés d'un triangle en multipliant par la même valeur les longueurs correspondantes de l'autre.
- Par exemple, si AM est trois fois plus petit que AB (donc $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$), alors AN est aussi trois fois plus petit que AC et MN est trois fois plus petit que BC.
- On a donc dans ce cas : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{3}$
- La proportion « petit côté » sur « grand côté » est la même pour tous les côtés.

d) Utilisation du théorème de Thalès

- Pour appliquer le théorème de Thalès, il faut être en « configuration de Thalès », c'est-à-dire que les trois conditions suivantes doivent être vérifiées :
  - M est sur le segment $[AB]$
  - M est sur le segment $[AC]$
  - (MN) est parallèle à (AB)
- Si c'est le cas, on peut alors affirmer que

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Exemple :



- Si on connaît certaines longueurs de segments, on peut alors en trouver d'autres.
- Ainsi, si on est en configuration de Thalès, avec :

$AM = 2$, $AB = 6$, $AC = 9$ et $MN = 4$,

on écrit : $\frac{2}{6} = \frac{AN}{9} = \frac{4}{BC}$.

De $\frac{2}{6} = \frac{AN}{9}$, on déduit :

$AN = 9 \times \frac{2}{6} = 3$.

De $\frac{2}{6} = \frac{4}{BC}$, on déduit :

$2 \times BC = 6 \times 4$

donc $BC = \frac{6 \times 4}{2} = 12$.