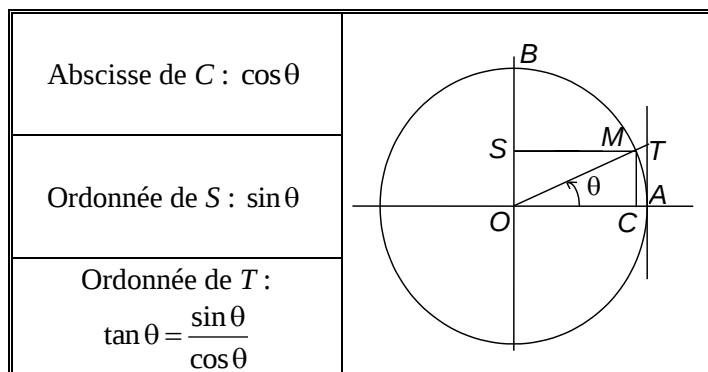


TRIGONOMÉTRIE

I) Angle orienté de vecteurs

a) Cercle trigonométrique – angle polaire

- On repère un point M sur le cercle trigonométrique (cercle de centre O et de rayon 1) grâce à son angle polaire, qui est l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM})$.
- On se place dans le repère orthonormal $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, orienté positivement sur le cercle dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre. Ainsi :



b) Mesure principale d'un angle orienté

- L'ensemble de ses mesures est $\{\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
La mesure se trouvant dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ est appelée la mesure principale de l'angle.
- L'ensemble des mesures est donc constitué des réels $\alpha = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, qu'on peut aussi noter $\alpha \equiv \theta[2\pi]$, qui est lu « α congru à θ modulo 2π ».

II) Les fonctions sinus et cosinus

1) Quelques qualités de fonctions

a) Fonction paire

- Définition** : Soit f une fonction définie sur un ensemble D . On dit que la fonction f est **paire** si :
 $\checkmark \quad x \in D \Leftrightarrow -x \in D$ (on dit que D est centré en 0)
 $\checkmark \quad$ Pour tout $x \in D, f(-x) = f(x)$
- Interprétation géométrique** : La courbe d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**. Il suffit donc de connaître la courbe sur $D \cap \mathbb{R}_+$ puis de la compléter par symétrie.

b) Fonction impaire

- Définition** : Sous les mêmes hypothèses que précédemment, une fonction f est **impaire** si :
 $\checkmark \quad x \in D \Leftrightarrow -x \in D$
 $\checkmark \quad$ Pour tout $x \in D, f(-x) = -f(x)$
- Interprétation géométrique** : La courbe d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine**. Il suffit donc de connaître la courbe sur $D \cap \mathbb{R}_+$ puis de la compléter par symétrie.

E1 : Déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires ou rien de cela :

$$f(x) = |x| \text{ sur } \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 \text{ sur } [-2; 1], \quad h(x) = \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}^*$$

E2 : Montrer que si une fonction est paire (resp. impaire) et dérivable, alors sa dérivée est impaire (resp. paire).

c) Fonction périodique

- Définition** : Soit T un réel strictement positif et f une fonction définie sur un ensemble D . On dit que la fonction f est **périodique de période T** si :
 $\checkmark \quad x \in D \Leftrightarrow x + T \in D$
 $\checkmark \quad$ Pour tout $x \in D, f(x + T) = f(x)$
- Interprétation géométrique** : La courbe d'une fonction périodique de période T est **invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$ ou $-T\vec{i}$** . Il suffit donc de connaître la courbe sur un intervalle d'amplitude T puis de la compléter par translations successives.

2) Fonction sinus : $f(x) = \sin x$

- f est une fonction périodique de période 2π .
On peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π , par exemple $[-\pi; \pi]$.
- f est une fonction impaire.
On peut donc l'étudier uniquement sur $[0; \pi]$.
- f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x , $f'(x) = \cos x$ dont on étudie le signe sur $[0; \pi]$.
 $f'(x)$ est nul en $\frac{\pi}{2}$, est strictement positif sur

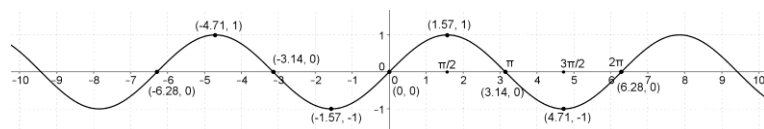
$$\left[0; \frac{\pi}{2}\right[\text{ et strictement négatif sur } \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

On en déduit que f est strictement croissante

$$\text{sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\text{ et strictement décroissante sur } \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

x	0	$\pi/2$	π
$\cos x$		+	0
$\sin$	0	1	0

- On trace la partie (C_1) de la courbe de f sur $[0; \pi]$, puis la partie (C_2) de la courbe de f sur $[-\pi; 0]$, symétrique de (C_1) par rapport au point O .
On complète en traçant les images de $(C_1) \cup (C_2)$ par les translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}, k \in \mathbb{Z}$.
- Représentation graphique de sinus sur $[-10; 10]$**

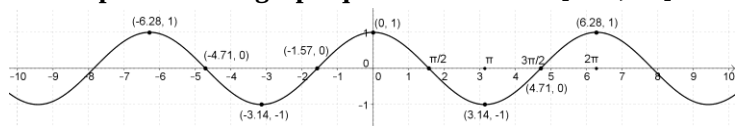


3) Fonction cosinus : $g(x) = \cos x$

- g est une fonction périodique de période 2π .
On peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π , par exemple $[-\pi; \pi]$.
- g est une fonction paire.
On peut donc l'étudier uniquement sur $[0; \pi]$.
- g est une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$. Pour tout réel x , $f'(x) = -\sin x$ dont on étudie le signe sur $[0; \pi]$;
 $f'(x)$ est nul en 0 et π et strictement négatif sur $]0; \pi[$. Donc f est strictement décroissante sur $[0; \pi]$.

x	0	π
$\sin x$	0	0
f	1	-1

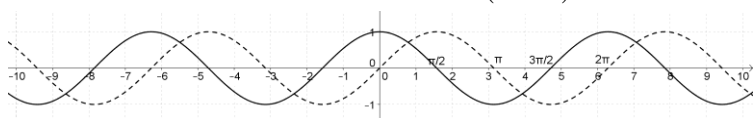
- On trace la partie (C_1) de la courbe de g sur $[0; \pi]$, puis la partie (C_2) de la courbe de g sur $[-\pi; 0]$, symétrique de (C_1) par rapport à (Oy) .
On complète en traçant les images de $(C_1) \cup (C_2)$ par les translations de vecteurs $2k\pi \vec{i}$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Représentation graphique de cosinus sur $[-10; 10]$**



4) Comparaison des deux courbes (sinus en pointillé, cosinus en trait plein)

Pour tout réel x , $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$.

La courbe de **cos** est l'image de celle de **sin** par la translation de vecteur $(-\pi/2) \vec{i}$



III) Valeurs et formules trigonométriques

1) Lignes trigonométriques (premier quadrant)

x (rad)	x ($^\circ$)	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0	0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$	1
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\sqrt{3} \approx 1,73$
$\frac{\pi}{2}$	90	1	0	non défini

E3 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unités sur les axes 0,5 cm. Soit le point A tel que $OA = 4$ cm, et $(\vec{j}; \overrightarrow{OA})$ a pour mesure $\frac{\pi}{6}$.
Déterminer les valeurs exactes des coordonnées de A.

2) Formules de trigonométrie

$-1 \leq \sin x \leq 1$	$-1 \leq \cos x \leq 1$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
$\cot x = \frac{1}{\tan x}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	
$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	
$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	
$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$	
$\cos(2x) = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2 \cos^2 x - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 x \end{cases}$	
$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$	$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

E4 : Étudier les fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin x (1 + \cos x) \quad g(x) = \sin^2 x \cos(2x)$$

E5 : Montrer que, pour tous les réels cités, on a :

- $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- $\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(3\alpha) = 3 \sin(\alpha) - 4 \sin^3(\alpha)$

E6 : a) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

b) Donner alors une écriture simplifiée de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

E7 : a) En utilisant le fait que la fonction sinus est dérivable, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

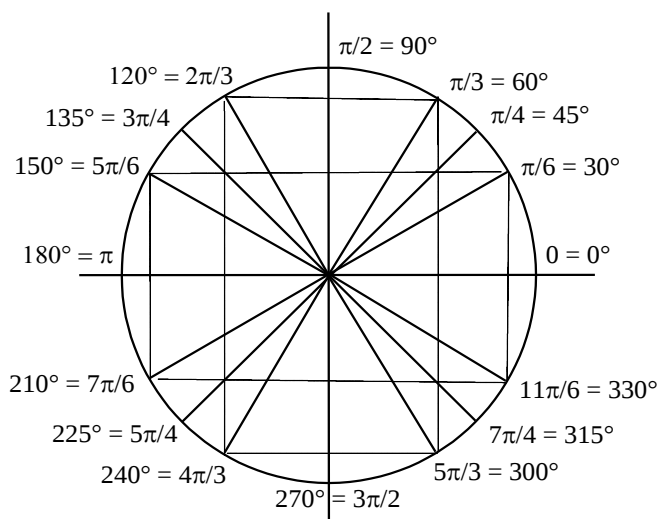
b) En déduire la limite de $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ quand x tend vers 0.

E8 : a) Exprimer $\tan(2x)$ en fonction de $\tan x$.

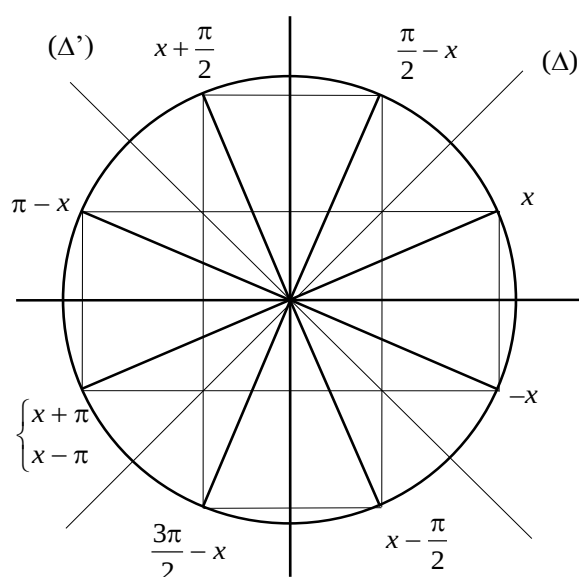
b) En déduire $\sin(2x)$ et $\cos(2x)$ en fonction de $\tan x$.

3) Lignes trigonométriques – interprétations

a) Les angles polaires les plus utilisés



b) Liens entre angles polaires et positions



c) Lignes trigonométriques des angles associés

Angle	sin	cos
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$
$x + \frac{\pi}{2}$	$\cos x$	$-\sin x$
$x + \pi$ $x - \pi$	$-\sin x$	$-\cos x$
$x - \frac{\pi}{2}$	$-\cos x$	$\sin x$
$\frac{\pi}{2} - x$	$\cos x$	$\sin x$
$\pi - x$	$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{3\pi}{2} - x$	$-\cos x$	$-\sin x$

IV) Équations trigonométriques

a) Résolution

	$\cos x = \cos \alpha$ $\Leftrightarrow$ $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
	$\sin x = \sin \alpha$ $\Leftrightarrow$ $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) Remarques

- Si n est un entier, l'équation $nx = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ se traduit par $x = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$ et correspond à n points distincts sur le cercle trigonométrique.
- On obtient des représentants des n mesures correspondantes en donnant à k successivement n valeurs entières consécutives, par exemple de 0 à $n - 1$, dans l'expression ci-dessus.
- Les équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ n'ont de solutions que si $-1 \leq a \leq 1$.

E9 : Résoudre les (in)équations suivantes dans les intervalles indiqués et placer l'ensemble des solutions sur un cercle trigonométrique :

- a) $2 \sin x = 1$ sur $\mathbb{R}$ b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[-\pi; 3\pi[$
c) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $]-\pi; \pi]$ d) $2 \sin x \geq -1$ sur $[0; 2\pi[$

c) Valeurs données par la calculatrice

Pour trouver une solution particulière de ces équations et se ramener au cas précédent, il suffit d'utiliser les touches INV, puis COS ou SIN.

Arccos a ou encore $\cos^{-1}(a)$
est la solution de $\cos x = a$ sur $[0; \pi]$

Arcsin a ou encore $\sin^{-1}(a)$
est la solution de $\sin x = a$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

E10 : Déterminer la valeur approchée de x arrondie à deux décimales sachant que :

- a) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin x = -0,8$
b) $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin x = 0,25$
c) $x \in [0; \pi]$ et $\cos x = 0,75$
d) $x \in [5\pi; 6\pi]$ et $\cos x = -0,6$