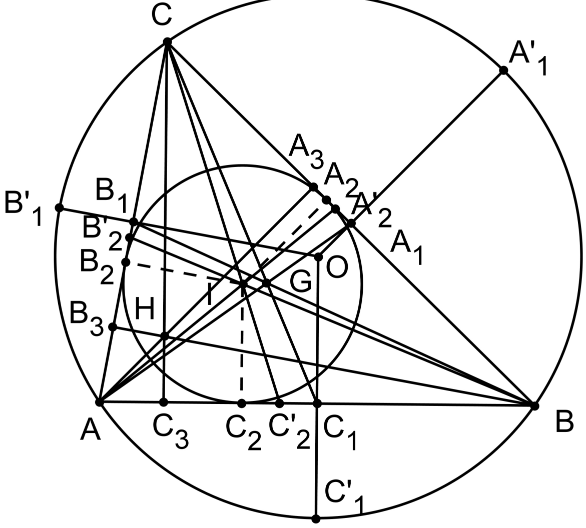
QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE

De certaines formules, on peut en déduire deux autres, par permutation circulaire des notions liées à A, B et C.

I) Vocabulaire et propriétés de base



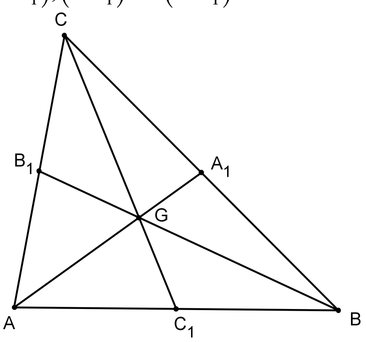
a) Angles et côtés

Sommets : A, B et C	Longueurs des côtés : $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$
Angles aux sommets: $\alpha = \widehat{CAB}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{BCA}$	Demi-périmètre : p Aire : S
Axiome : $\alpha + \beta + \gamma = \pi$	
<u>*Relation d'Al-Kashi*</u>[1] / formule du cosinus : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$	
$c = b \cos \alpha + a \cos \beta$	
<u>*Formule du sinus*</u> : $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$	
$S = \dfrac{1}{2}\left\lvert \text{dét}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right\rvert = \dfrac{1}{2} bc \sin\alpha$	
<u>*Formule de Héron*</u>[2] : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	

b) Médianes

A_1, B_1 et C_1, milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$

<u>*Médianes*</u> **:** (AA_1), (BB_1) et (CC_1)

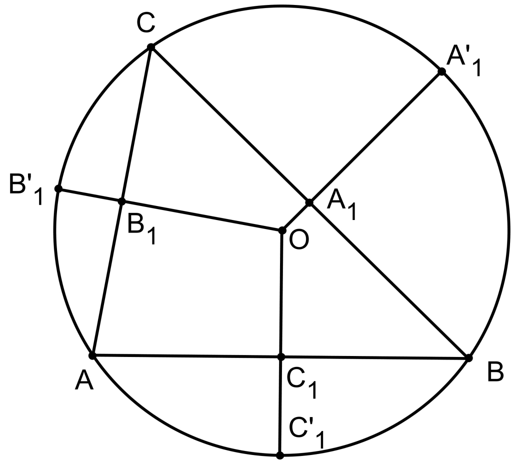


- Les trois médianes sont concourantes au point, noté G, qui est appelé <u>*centre de gravité*</u> du triangle (ABC).

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (G isobarycentre de A, B et C)
$\overrightarrow{AB} = -2\,\overrightarrow{A_1B_1}$ donc $(AB) \mathbin{/\!/} (A_1B_1)$
$\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} = 2\,\overrightarrow{GA_1}$
$AA_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}$

c) Médiatrices

Perpendiculaires à (BC) (respectivement (CA), (AB)) passant par A_1 (resp. B_1, C_1)

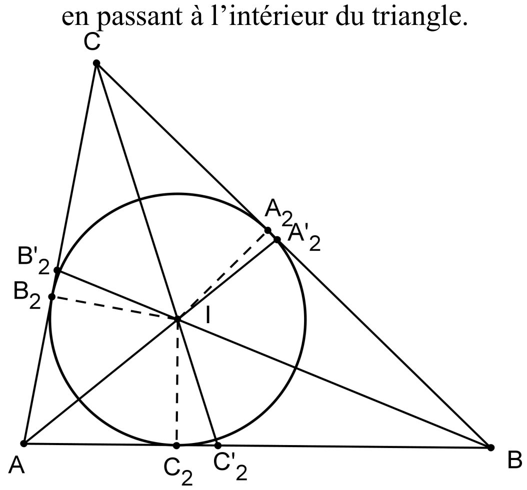


- Les trois médiatrices sont concourantes au point, noté O, appelé <u>*centre du cercle circonscrit*</u> du triangle (ABC), qui vérifie $OA = OB = OC$
- Le cercle de centre O passant par A passe aussi par B et C ; c'est le <u>*cercle circonscrit*</u> du triangle (ABC) ; son rayon est noté R.
- Intersections des demi-médiatrices $[OA_1)$, $[OB_1)$ et $[OC_1)$ avec le cercle circonscrit : A_1', B_1' et C_1'.

$R = OA_1' = \dfrac{S}{c\sin\alpha\sin\beta} = \dfrac{a}{2\sin\alpha} = \dfrac{abc}{4S}$
$OA_1 = \dfrac{a}{2}\lvert\cot\alpha\rvert$ (cotangente : $\cot = \dfrac{1}{\tan}$)

d) Bissectrices intérieures

Droites passant par A (resp. B, C) et coupant l'angle au sommet correspondant en deux angles de même mesure, en passant à l'intérieur du triangle.



---

[1] *Ghiyath Al-Kashi, arabe (Iran), 1380–1429*

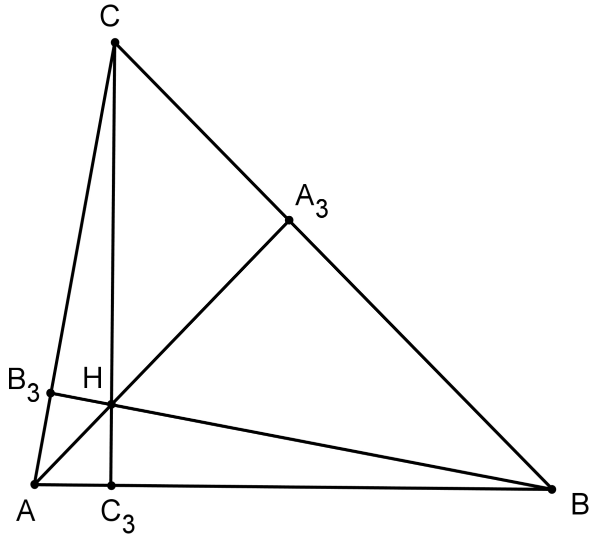
[2] *Héron d'Alexandrie, grec, environ 100 apr. J.-C.*

- Pieds des bissectrices intérieures : A_2', B_2' et C_2'
- Projetés orthogonaux de *I* sur les côtés : A_2, B_2 et C_2
- Les trois bissectrices intérieures sont concourantes en un point, noté *I*, appelé <u>*centre du cercle inscrit*</u> du triangle (*ABC*), vérifiant $IA_2 = IB_2 = IC_2$
- Le cercle de centre *I* tangent au côté (*BC*) (en A_2) et aussi tangent aux côtés (*CA*) et (*AB*) ; c'est le <u>*cercle inscrit*</u> du triangle (*ABC*) ; son rayon est noté *r*

$a\,\overrightarrow{C_2'A} + b\,\overrightarrow{C_2'B} = \vec{0}$ donc $\dfrac{\overline{C_2'A}}{\overline{C_2'B}} = -\dfrac{b}{a}$
$a\,\overrightarrow{IA} + b\,\overrightarrow{IB} + c\,\overrightarrow{IC} = \vec{0}$
$OA_1 + OB_1 + OC_1 = R + r$
$a\,\overrightarrow{IA_2} + b\,\overrightarrow{IB_2} + c\,\overrightarrow{IC_2} = \vec{0}$
<u>*Formule d'Euler*</u>[3] : $OI^2 = R(R-2r)$
$S = p \times r$
$AB_2 = AC_2 = p - a$

e) Hauteurs

Perpendiculaires à (*BC*) (resp. (*CA*), (*AB*)) passant par *A* (resp. *B*, *C*). Pieds des hauteurs : A_3, B_3 et C_3.



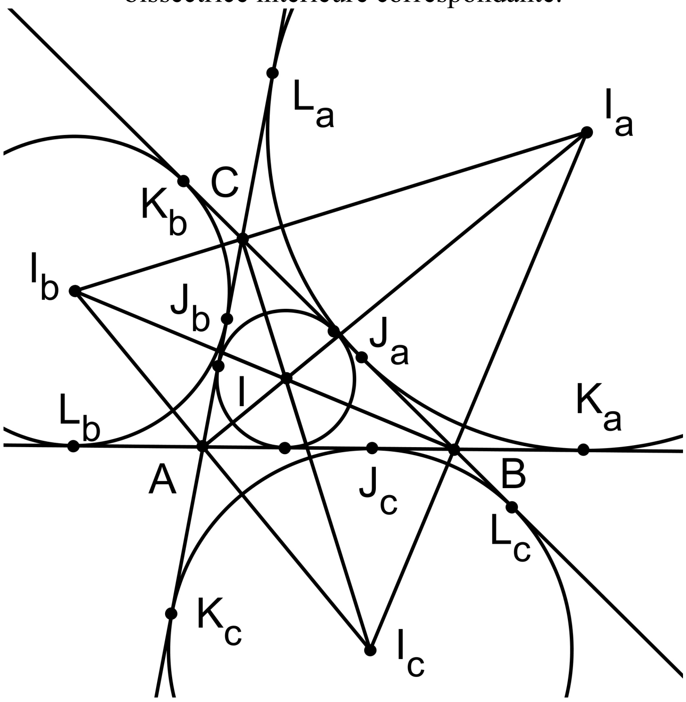
- Les trois hauteurs sont concourantes en un point, noté *H*, qui est appelé l'<u>*orthocentre*</u> du triangle (*ABC*)

$AH = a\cot\alpha = b\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}$
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{HG} = 2\,\overrightarrow{GO}$
$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$

[3] *Leonhard Euler, suisse, 1707–1783*

f) Bissectrices extérieures

Droites passant par *A* (resp. *B*, *C*) et perpendiculaires à la bissectrice intérieure correspondante.



- La bissectrice intérieure issue de *A* (resp. *B*, *C*) et les deux bissectrices extérieures issues de *B* et de *C* (resp. *C* et *A*, *A* et *B*) sont concourantes en un point noté I_a (resp. I_b, I_c), appelé le <u>*centre du cercle exinscrit*</u> en *A* (resp. *B*, *C*) au triangle (*ABC*).
- Le cercle de centre I_a (resp. I_b, I_c) tangent au côté (*BC*) et aussi tangent aux côtés (*CA*) et (*AB*) ; c'est le <u>*cercle exinscrit*</u> en *A* du triangle (*ABC*) ; son rayon est r_a (resp. r_b, r_c).
- Points de tangence du cercle de centre I_a avec (*BC*) : J_a ..., avec (*AB*) : K_a ..., avec (*CA*) : L_a ...

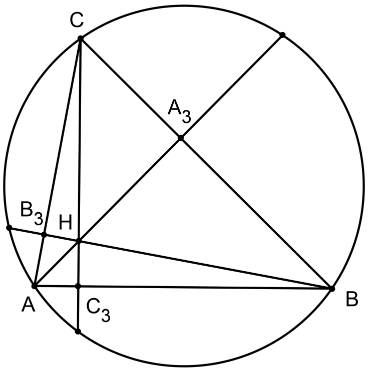
$-a\,\overrightarrow{I_aA} + b\,\overrightarrow{I_aB} + c\,\overrightarrow{I_aC} = \vec{0}$
$AK_a = AL_a = p$
$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$ et $\dfrac{1}{r_a} = -\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$
$r_a = \dfrac{S}{p-a}$ et $r_a r_b r_c = p^2 r$
$AJ_b = AL_b = BJ_a = BK_a = p - c$
$r_a + r_b + r_c = 4R + r$ et $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$
$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 16R^2 - r^2$
$OI^2 + OI_a^2 + OI_b^2 + OI_c^2 = 12R^2$
$S = \sqrt{r r_a r_b r_c} = \dfrac{r_a r_b r_c}{\sqrt{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}}$

g) Égalités trigonométriques

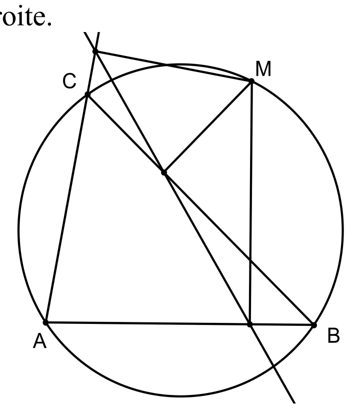
$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{p}{R}$
$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{r}{4R}$
$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{2S}{R^2}$
$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=$ $1+4\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)=1+\frac{r}{R}$
$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$
$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{r}{p}=\frac{S}{p^2}$

h) Autres propriétés

- A, I, A_2', A_1' et I_a sont alignés.
- *H* est le seul point dont les symétriques par rapport aux côtés soient sur le cercle circonscrit.

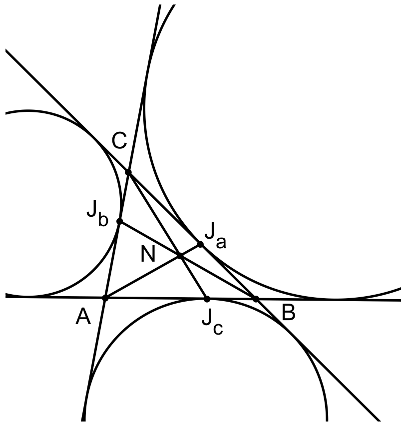


- Le point *I*, centre du cercle inscrit, est l'unique solution de l'équation : $aMA^2+bMB^2+cMC^2=abc$
- Les milieux des segments joignant deux quelconques des quatre centres des cercles inscrit et exinscrits sont sur le cercle circonscrit.
- Les projetés orthogonaux sur les côtés d'un point *M* du cercle circonscrit sont alignés sur une droite dite _droite de Simson_[4] (ou _droite de Wallace_[5]) associée à *M*. Les points *M* et l'orthocentre *H* sont équidistants de cette droite.

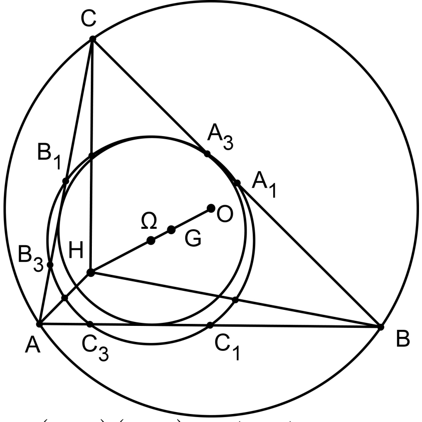


[4] *Robert Simson, écossais, 1687–1768*
[5] *William Wallace, écossais, 1768–1843*

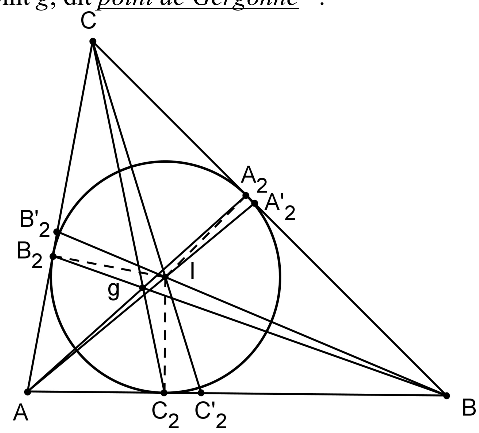
- Les droites $(AJ_a),(BJ_b)$ et (CJ_c) sont concourantes en un point *N*, dit _point de Nagel_[6].



- *H*, *G* et *O* sont alignés sur la _droite d'Euler_, avec $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{GO}$.
- Le cercle de centre Ω, milieu de [*OH*] et de rayon *R* / 2 est appelé le _cercle d'Euler_ (ou _de Feuerbach_[7]) ; il passe par les points suivants : $A_1, B_1, C_1, A_3, B_3, C_3$ et les milieux de [*AH*], [*BH*] et [*CH*]. Il est tangent aux quatre cercles inscrit et exinscrits de (*ABC*), ainsi que de (*AHB*), (*BHC*) et (*CHA*). Il est homothétique du cercle circonscrit de centre *G* et de rapport – 1/2.

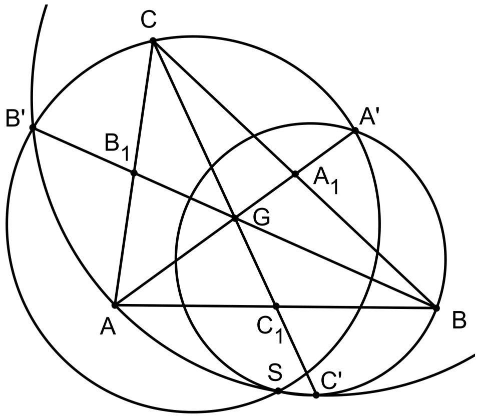


- Les droites $(AA_2),(BB_2)$ et (CC_2) sont concourantes en un point *g*, dit _point de Gergonne_[8].



- Les trois cercles passant par un sommet et les symétriques des deux autres par rapport à *G* sont concourants au point *S* dit _point de Steiner_[9].

[6] *Christian Heinrich von Nagel, allemand, 1803–1882*
[7] *Karl Wilhelm Feuerbach, allemand, 1800–1834*
[8] *Joseph Diaz Gergonne, français, 1771–1859*
[9] *Jakob Steiner, suisse, 1796–1863*



II) Coordonnées barycentriques

a) Définition

On sait que si A, B et C sont trois points non alignés du plan, alors tout point M du plan peut être défini grâce à ces trois points. On peut ainsi définir les deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$. Les réels λ et μ sont les coordonnées de M dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right)$.

Mais grâce à la relation de Chasles[10], on a : pour tout point O, $\overrightarrow{OM} = (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{OC}$, ce qui traduit le fait que M est le barycentre de $\{(A\,;1-\lambda-\mu), (B\,;\lambda), (C\,;\mu)\}$.

Tout point du plan est barycentre de $\{(A\,;x), (B\,;y), (C\,;z)\}$, avec $x + y + z \neq 0$. Ces trois réels (non uniques) s'appellent des <u>*coordonnées barycentriques*</u> de M dans le repère (A, B, C).

b) Quelques propriétés

- Si M est un point du plan de coordonnées barycentriques x, y et z dans le repère (A, B, C), et si la droite (AM) est sécante avec la droite (BC) (c'est-à-dire $y + z$ non nul), alors leur point d'intersection a pour coordonnées barycentriques 0, y et z.
- Si M est un point intérieur au triangle (ABC), de coordonnées barycentriques x, y et z, positives et de somme 1 dans le repère (A, B, C), alors on a :

$$\frac{x}{Aire(MBC)} = \frac{y}{Aire(MCA)} = \frac{z}{Aire(MAB)} = \frac{1}{Aire(ABC)}.$$

c) Quelques coordonnées barycentriques

Point	**1re coord.**	**2e coord.**	**3e coord.**
A	1	0	0
A_1	0	1	1
A_1'	$-a^2$	$b(b+c)$	$c(b+c)$
A_2	0	$p-c$	$p-b$
A_2'	0	b	C
	0	$\sin\beta$	$\sin\gamma$
G	1	1	1
I	a	b	c
	$\sin\alpha$	$\sin\beta$	$\sin\gamma$
O	$\sin 2\alpha$	$\sin 2\beta$	$\sin 2\gamma$
H	$\tan\alpha$	$\tan\beta$	$\tan\gamma$
I_a	$-a$	b	c
	$-\sin\alpha$	$\sin\beta$	$\sin\gamma$
L	a^2	b^2	c^2
	$\sin^2\alpha$	$\sin^2\beta$	$\sin^2\gamma$
g	$\dfrac{1}{p-a}$	$\dfrac{1}{p-b}$	$\dfrac{1}{p-c}$
Ω	$2\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma$	$\tan\alpha + 2\tan\beta + \tan\gamma$	$\tan\alpha + \tan\beta + 2\tan\gamma$
	$b\cos\beta + c\cos\gamma$	$c\cos\gamma + a\cos\alpha$	$a\cos\alpha + b\cos\beta$
N	$p-a$	$p-b$	$p-c$
I_a	$-a$	b	c
J_a	0	$p-b$	$p-c$
K_a	$p-c$	$-p$	0
L_a	$p-b$	0	$-p$

d) Quelques équations barycentriques

Comme pour les coordonnées cartésiennes, un ensemble de points peut être caractérisé par une relation entre les coordonnées barycentriques de ses points ; quelques exemples :

Cercle circonscrit : $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$
Cercle inscrit : $\left((p-a)x+(p-b)y+(p-c)z\right)^2 = 2\left((p-a)^2x^2+(p-b)^2y^2+(p-c)^2z^2\right)$
Cercle exinscrit en A : $p^2x^2+\left((p-c)y-(p-b)z\right)^2 = 2px\left((p-c)y+(p-b)z\right)$
Cercle d'Euler : $\left(b^2+c^2-a^2\right)x^2+\left(c^2+a^2-b^2\right)y^2+\left(a^2+b^2-c^2\right)z^2 = 2\left(a^2yz+b^2zx+c^2xy\right)$

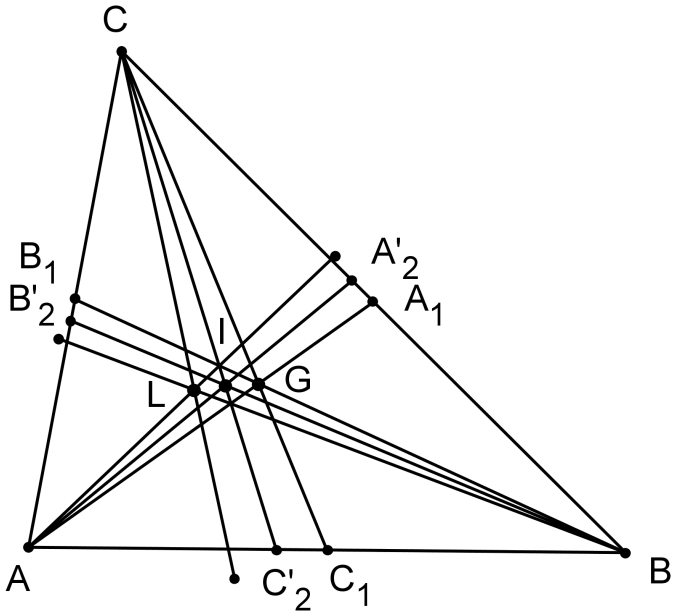
- Déterminer les équations barycentriques des droites classiques liées au triangle (côtés, céviennes [11],…)

[10] *Michel Chasles, français, 1793–1880*

[11] *On appelle céviennes d'un triangle trois droites issues des sommets et concourantes. Exemples : Les médianes, les hauteurs et les bissectrices. Du nom du mathématicien Tommaso Ceva, italien, 1648-1737.*

III) Exercice sur le point de Lemoine

- Les symétriques des médianes par rapport à aux bissectrices intérieures (appelées <u>*symédianes*</u>) sont concourantes en un point, dit <u>*point de Lemoine*</u>[(12)].



- Soit (ABC) un triangle. Soit α, β et γ trois réels de somme non nulle.

1) a) Soit M le barycentre de $\{(A\,;\alpha), (B\,;\beta), (C\,;\gamma)\}$. Montrer qu'il existe un réel k strictement positif pour lequel les trois réels $k|\alpha|$, $k|\beta|$ et $k|\gamma|$ sont les aires respectives des triangles (MBC), (MCA) et (MAB).

b) En déduire que les distances de M aux côtés du triangle (ABC) sont proportionnelles à $\dfrac{|\alpha|}{a}$, $\dfrac{|\beta|}{b}$ et $\dfrac{|\gamma|}{c}$.

2) Montrer que, pour tous réels a, b, c, x, y et z, on a :
$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=$$
$$(x+y+z)^2+\left(\frac{xb}{a}-\frac{ya}{b}\right)^2+\left(\frac{xc}{a}-\frac{za}{c}\right)^2+\left(\frac{yc}{b}-\frac{zb}{c}\right)^2$$

3) En déduire que la somme des carrés des distances d'un point M aux trois côtés du triangle (ABC) est minimum si et seulement si $M = L$, barycentre du système $\left\{\left(A\,;a^2\right),\left(B\,;b^2\right),\left(C\,;c^2\right)\right\}$, appelé <u>*point de Lemoine*</u> du triangle (ABC).

4) Soit P, Q et R les pieds des bissectrices intérieures de (ABC), respectivement situés sur [BC], [CA] et [AB]. À tout point M barycentre de $\{(A\,;\alpha), (B\,;\beta), (C\,;\gamma)\}$, où les trois coefficients sont positifs, on associe les trois droites suivantes : la symétrique de (AM) par rapport à (AP), la symétrique de (BM) par rapport à (BQ) et la symétrique de (CM) par rapport à (CR).

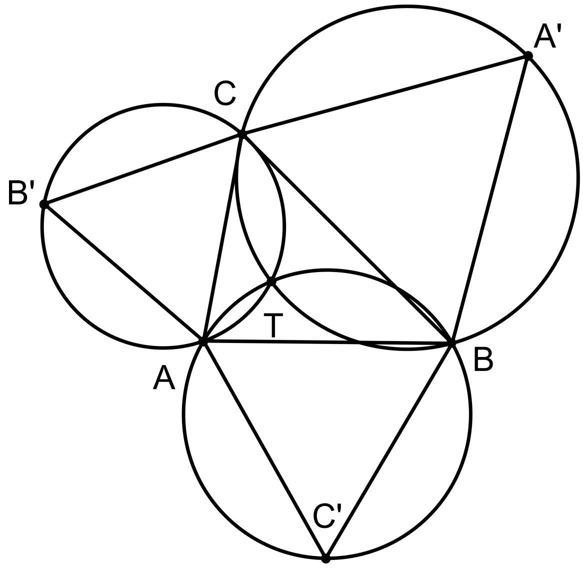
a) Montrer que ces trois droites sont concourantes au point M', barycentre du système
$$\left\{\left(A\,;\frac{a^2}{\alpha}\right),\left(B\,;\frac{b^2}{\beta}\right),\left(C\,;\frac{c^2}{\gamma}\right)\right\}.$$

b) En déduire une construction du point de Lemoine L.

(12) *Émile Lemoine, français, 1840–1912*

IV) Exercice sur le point de Torricelli

- Si on construit sur chaque côté d'un triangle, à l'extérieur de celui-ci, un triangle équilatéral, alors les cercles circonscrits à ces trois triangles sont concourants en un point T, appelé <u>*point de Torricelli*</u>[(13)] du triangle ; ce point est le seul vérifiant :
$$\widehat{ATB}=\widehat{BTC}=\widehat{CTA}=2\pi/3\,.$$



<u>**Construction d'un réseau routier**</u> : On veut relier trois villes A, B et C par trois routes se rejoignant en un point M tel que $MA + MB + MC$ soit minimale.

- On suppose que les trois angles aux sommets du triangle (ABC) ont des mesures inférieures à $2\pi/3$ et que (ABC) est dans le sens direct. On note, pour tout point M du plan, $f(M) = MA + MB + MC$.

1) a) On suppose ici que le point M est situé dans le demi-plan de frontière (BC) et ne contenant pas A. Soit N le symétrique de M par rapport à (BC). Montrer que le fonction f ne peut être minimale en M.

b) Montrer que si M est à l'extérieur du triangle (ABC), alors la fonction f ne peut être minimale en M.

2) a) On construit à l'extérieur du triangle (ABC) les triangles équilatéraux (ACB'), (BAC') et (CBA'). Montrer que le segment [BB'] est dans le même demi-plan de frontière (BC) que A, et dans le même demi-plan de frontière (AB) que C (on pourra utiliser les hypothèses sur les angles du triangle).

b) En utilisant des rotations de centres respectifs A, B et C et d'angles convenablement choisis, montrer que $AA' = BB' = CC'$.

3) Soit r la rotation de centre C et d'angle $-\pi/3$. On pose alors, pour tout M, $M_1 = r(M)$.

a) Montrer que, pour tout M, $f(M) \geq BB'$ et que, $f(M) = BB'$ si et seulement si B, M, M_1 et B' sont alignés dans cet ordre.

b) Montrer qu'il existe un unique point T, que l'on précisera, vérifiant $f(T) = BB'$. Le point T est appelé le <u>*point de Torricelli*</u> du triangle (ABC).

4) Que peut-on dire des trois cercles circonscrits aux triangles (ACB'), (BAC') et (CBA') ?

(13) *Evangelista Torricelli, italien, 1608–1647*