BARYCENTRES

Sauf indication contraire, les notions suivantes sont valables aussi bien dans le plan que dans l'espace.

I) Fonction vectorielle de Leibniz

a) Définition :

- Soit un entier $n \geq 1$.
  Soit $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ n points et $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ n réels.
  On appelle *fonction vectorielle de Leibniz* associée au *système* $\{(A_1 ; \alpha_1), (A_2 ; \alpha_2), \cdots, (A_n ; \alpha_n)\}$ la fonction $\vec{f}$ qui, à tout point M, associe le vecteur

$$\boxed{\vec{f}(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}}$$

b) Vocabulaire :

- Pour tout entier i de 1 à n, le couple $(A_i ; \alpha_i)$ s'appelle un *point pondéré*, α_i est le *coefficient* de A_i.
  Le réel $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ est appelé *masse totale* du système.

c) Propriété de base :

P1 : Pour tous points M et N, $\vec{f}(M) = \vec{f}(N) + \alpha \overrightarrow{MN}$

d) Théorèmes :

P2 : Si α est nul, alors $\vec{f}$ est constante.
P3 : Si α est non nul alors $\vec{f}$ est bijective, c'est-à-dire que, pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un et un seul point M tel que $\vec{f}(M) = \vec{u}$.

En particulier, pour $\vec{u} = \vec{0}$, il existe donc un unique point G vérifiant $\vec{f}(G) = \vec{0}$.

II) Barycentre d'un système de points pondérés

a) Définition et notation :

- Soit $\{(A_i ; \alpha_i), i \in [1 ; n]\}$ un système de points pondérés de masse totale non nulle. On appelle *barycentre* de ce système l'unique point G vérifiant : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

- On pourra noter : $G = $ bar

A_1	A_2	...	A_n
α_1	α_2	...	α_n

b) Propriété caractéristique :

P4 : G peut être défini par :

$$\text{Pour tout } M,\ \overrightarrow{MG} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

c) Interprétation physique du barycentre :

- $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ peut être interprétée en Physique comme une somme de forces appliquée au point M.

- $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \alpha \overrightarrow{MG}}$ indique qu'on a remplacé cette somme de vecteurs par un seul vecteur, avec une masse totale égale à la somme des masses du système (d'où le nom *bary – centre*, « centre lourd »).

- $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}}$ indique que, si on applique ces forces au point G, on a ainsi équilibre du système.

III) Propriétés du barycentre

- **P5** : Les points pondérés peuvent être placés dans un ordre quelconque.

bar

A	B	C	D
1	–3	2	4

= bar

B	C	A	D
–3	2	1	4

- **P6** : Les points pondérés à coefficient nul peuvent être éliminés du système.

bar

A	B	C	D
1	–3	0	4

= bar

A	B	D
1	–3	4

- **P7** : Si deux points sont confondus, on peut remplacer les deux points pondérés correspondants par un seul ayant comme coefficient la somme des deux coefficients.

bar

A	B	A	D
1	–3	4	4

= bar

A	B	D
5	–3	4

- **P8** : Soit $G = \text{bar}\{(A_i ; \alpha_i), i \in [1 ; n]\}$ et soit k un réel non nul, alors $G = \text{bar}\{(A_i ; k\alpha_i), i \in [1 ; n]\}$.

En d'autres termes, on peut multiplier tous les coefficients d'un système par un réel non nul sans en changer le barycentre. Cela permet de choisir la valeur de α que l'on veut, par exemple $\alpha = 1$, en divisant chaque coefficient par la masse totale initiale.

bar

A	B	C
1	2	3

= bar

A	B	C
1/6	1/3	1/2

- Si tous les coefficients sont égaux (par exemple à $1/n$), G s'appelle l'*isobarycentre* du système. Il n'est pas nécessaire alors de préciser les coefficients.

- **P9 :** *Théorème du barycentre partiel* (ou encore *théorème d'associativité*)
  Soit le système $\{(A_i ; \alpha_i), i \in [1 ; n]\}$ de masse totale α non nulle et de barycentre G. Soit $\alpha' = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$ non nul et G' le barycentre de $\{(A_i ; \alpha_i), i \in [1 ; n-1]\}$.
  Alors G est le barycentre de $\{(G' ; \alpha'), (A_n ; \alpha_n)\}$.

Ce théorème permet de construire un barycentre de proche en proche grâce au barycentre de deux points.

IV) Barycentre de deux points

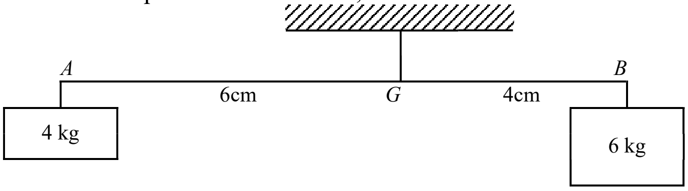
a) Définitions (avec $a + b \neq 0$**)**

$G = \text{bar}$

A	B
a	b

- $\boxed{a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}}$
- Pour tout M, $\boxed{\overrightarrow{MG} = \dfrac{a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB}}{a+b}}$
- Donc, pour $M = A$, $\boxed{\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}}$
- Interprétation physique :

Équilibre d'un mobile, avec $a = 4$ et $b = 6$



b) Propriétés :

- **P10** : Le barycentre G est aligné avec A et B.
- **P11** : Lorsque $a = b$ (= 1/2 par exemple), l'isobarycentre est le **milieu** du segment $[AB]$.
- **P12 :** L'ensemble des barycentres de A et de B (points distincts) est la droite (AB).
- **P13 :** L'ensemble des barycentres des points A et B (distincts) avec des coefficients de même signe est le segment $[AB]$.
- **P14 :** Si a et b sont positifs, on obtient le point G en divisant le segment $[AB]$ en $a + b$ parties égales, et en se plaçant à b parties venant de A (ou à a parties venant de B). (*Voir* mobile ci-dessus)

V) Barycentre de trois points

a) Définitions (avec $a + b + c \neq 0$**)**

$G = \text{bar}$

A	B	C
a	b	c

- $\boxed{a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}}$
- Pour tout M, $\boxed{\overrightarrow{MG} = \dfrac{a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} + c\,\overrightarrow{MC}}{a+b+c}}$
- Donc, pour $M = A$, $\boxed{\overrightarrow{AG} = \dfrac{b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}}{a+b+c}}$

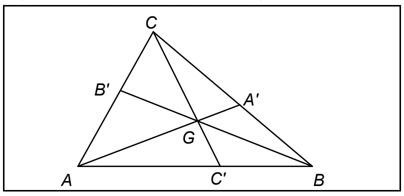
b) Propriétés :

- **P15** : Lorsque $a = b = c$ (= 1/3 par exemple), l'isobarycentre des trois points A, B et C est le **centre de gravité** du triangle (ABC).
- **P16** : L'ensemble des barycentres des points A, B et C (non alignés) est le plan (ABC).
- **P17** : Soit (ABC) un triangle.
  Si les trois droites (AA'), (BB') et (CC') concourent au point G, barycentre de $\{(A\,;a),(B\,;b),(C\,;c)\}$, alors :

$A' = \text{bar}\{(B\,;b),(C\,;c)\}$

$B' = \text{bar}\{(A\,;a),(C\,;c)\}$

$C' = \text{bar}\{(A\,;a),(B\,;b)\}$.



- **P18** : L'ensemble des barycentres des points A, B et C (non alignés) avec des coefficients de même signe est l'intérieur du triangle (ABC).

Exercices :

1 : Soit (ABC) un triangle. Placer le barycentre G du système $\{(A\,;1), (B\,;2)\}$ et H barycentre du système $\{(A\,;2), (B\,;4), (C\,;-3)\}$.

2 : Soit $(ABCDEF)$ un hexagone régulier de centre O. Calculer la somme des vecteurs obtenus en joignant A à chacun des autres sommets, en fonction du vecteur $\overrightarrow{OA}$.

3 : Soit A et B deux points. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\|$.

4 : Soit les trois points $A(1\,;2)$, $B(-2\,;3)$ et $C(4\,;7)$. Déterminer les réels a, b et c tels que l'origine O soit barycentre de $(A\,;a)$, $(B\,;b)$ et $(C\,;c)$.

5 : Soit $(ABCD)$ un carré. Déterminer b et d pour que C soit le barycentre de $(A\,;1)$, $(B\,;b)$ et $(D\,;d)$.

6 : Soit $(ABCD)$ un quadrilatère. On note respectivement I, J, K et L les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Montrer que $(IJKL)$ est un parallélogramme, de même isobarycentre que $(ABCD)$.

7 : Soit ABC un triangle. On nomme B' le milieu de $[AC]$ et C' le milieu de $[AB]$.

a) Montrer que le barycentre G du système $\{(A\,;3), (B\,;2), (C\,;1)\}$ appartient au segment $[B'C']$.

b) Les droites (AG) et (BC) se coupent au point H. Exprimer H comme barycentre de B et de C.

8 : Soit (ABC) un triangle et m un réel non nul. Soit G le barycentre de $(A\,;1)$, $(B\,;-1)$ et $(C\,;m)$. Déterminer m pour que $(ABCG)$ soit un parallélogramme.

9 : $(ABCD)$ est un parallélogramme. I le milieu de $[AB]$, J celui de $[CD]$ et K celui de $[BJ]$. Soit L le point tel que $\overrightarrow{IL} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$. Exprimer L comme barycentre de I et J et montrer que A, K et L sont alignés.

10 : Soit $(ABCD\ EFGH)$ un parallélépipède.

a) Exprimer A comme barycentre de C, F, G et H.

b) Soit I le centre de gravité du triangle (FHC). Montrer que A est barycentre de I et de G affectés de coefficients à déterminer.

c) En déduire que la droite (AG) coupe le plan (FCH) au point I. Préciser la position de I sur $[AG]$.

d) Soit J l'isobarycentre des points B, D et E. Montrer que les points I et J partagent le segment $[AG]$ en trois segments de longueurs égales.

11 : $(ABCD)$ est un tétraèdre. G le centre de gravité de ABC, I le milieu de $[AB]$, J celui de $[BC]$, K et L les points tels que : $\overrightarrow{CK} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DL} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DA}$.

Exprimer les points I, J, K et L en tant que barycentres des points A, B, C et D. En déduire que les droites (IK), (JL) et (DG) sont concourantes.