CONIQUES

I) INTRODUCTION

L'objet de ce chapitre est l'étude de courbes planes que l'on peut définir comme intersection d'un plan avec un cône de révolution.
Nous en connaissons déjà quelques exemples :

- La parabole, d'équation $y = ax^2 + bx + c$,
- L'hyperbole, d'équation $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$
- Le cercle d'équation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

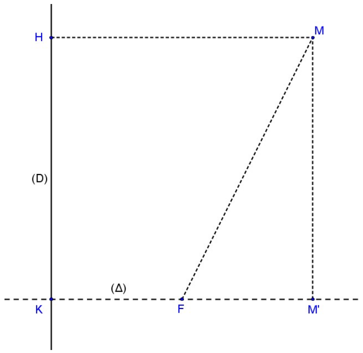
Nous allons voir ici une classification particulière de ces coniques, par la définition dite « *foyer-directrice* ».

II) DÉFINITION FOYER - DIRECTRICE

Soit (D) une droite, appelée *directrice*, soit F un point hors de (D), appelé *foyer*, et soit enfin e, un réel strictement positif.
On appelle *conique* d'*excentricité* e, l'ensemble des points M tels que :

$$\boxed{MF = eMH}$$

où H est projeté orthogonal de M sur (D). (MH est la distance de M à (D)).
L'ensemble (C) est la *ligne de niveau* e de la fonction qui, à tout point M du plan, associe le réel $\dfrac{MF}{MH}$.



III) PREMIÈRES PROPRIÉTÉS ET VOCABULAIRE

Notons K le projeté orthogonal de F sur (D) et (Δ) la droite (KF).

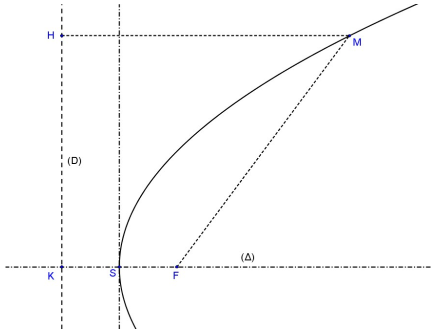
- Montrer que (Δ) est *axe de symétrie* de (C). On l'appelle l'*axe focal* de (C), car il contient le foyer.
- Déterminer l'ensemble des points d'intersection de (C) avec (Δ). (On distinguera $e = 1$ et $e \neq 1$). On appelle ce ou ces points des *sommets* de (C).
- Soit (D') la parallèle à (D) passant par F. Montrer que (C) et (D') ont deux points d'intersection, que l'on notera U et V. Calculer FU et FV en fonction des données. Ce réel est noté p et est appelé le *paramètre* de (C).
- M étant un point quelconque de la conique, on note M' le projeté orthogonal de M sur l'axe focal. Montrer que, si $e = 1$, $MM'^2 = 2\,\overrightarrow{M'S}\cdot\overrightarrow{KF}$, où S est le sommet cité précédemment.
- Montrer que, si $e \neq 1$, $MM'^2 = \left(e^2 - 1\right)\left(OM'^2 - OA^2\right)$, où A et A' sont les sommets cités au 2) et où O est le milieu de $[AA']$.
- Que devient la formule ci-dessus lorsqu'on fait tendre e vers 0 ?
  Quelle courbe obtient-on ?
- Lorsque $e \neq 1$, on appelle *axe non focal* la droite (Δ'), perpendiculaire à (Δ) passant par O. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de (Δ') avec (C) (On discutera selon la valeur de e). Lorsqu'ils existent, ces points s'appellent aussi des *sommets* de (C) ; on les notera B et B'.

Cas e = 1 : LA PARABOLE

DÉFINITION

On appelle *parabole* une conique d'excentricité égale à 1.

- Une parabole est donc l'ensemble des points équidistants d'un point et d'une droite. Notons (P) cette parabole.
- En se plaçant dans un repère où S est l'origine, $\vec{i}$ le vecteur $\dfrac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$, et $\vec{j}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{i}$, la propriété $MM'^2 = 2\overrightarrow{M'S}\cdot\overrightarrow{FK}$ devient : $\boxed{y^2 = 2px}$, où p est le paramètre de (P).
- Cette équation s'appelle l'*équation réduite* de la parabole.

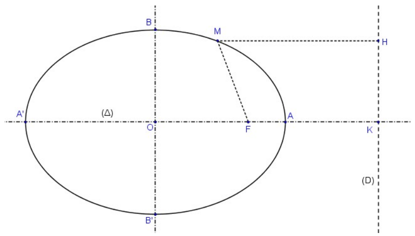


Cas 0 < e < 1 : L'ELLIPSE

DÉFINITION

On appelle *ellipse* une conique d'excentricité comprise strictement entre 0 et 1.

- En se plaçant dans le repère $\left(O;\dfrac{1}{OA}\overrightarrow{OA},\dfrac{1}{OB}\overrightarrow{OB}\right)$, l'égalité $MM'^2 = (e^2 - 1)(OM'^2 - OA^2)$ devient : $y^2 = (e^2 - 1)(x^2 - a^2)$, avec $OA = a$. On pose $b = OB = OB' = a\sqrt{1-e^2}$, (on a $a > b$), on a alors : $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$.
- Cette équation s'appelle l'*équation réduite* de l'ellipse.
- Montrer que $\overrightarrow{OF} = e\,\overrightarrow{OA}$, et que, si on note c l'abscisse de F, on a $c = ea = \sqrt{a^2 - b^2}$.

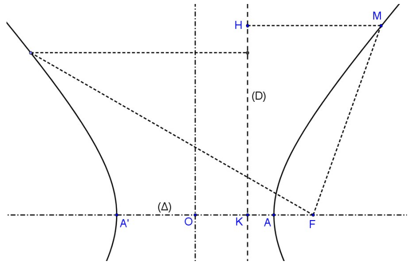


Cas e > 1 : L'HYPERBOLE

DÉFINITION

On appelle *hyperbole* une conique d'excentricité strictement supérieure à 1.

- En se plaçant dans le repère $\left(O;\dfrac{1}{OA}\overrightarrow{OA},\dfrac{1}{OB}\overrightarrow{OB}\right)$, l'égalité $MM'^2 = (e^2 - 1)(OM'^2 - OA^2)$ devient : $y^2 = (e^2 - 1)(x^2 - a^2)$, avec $OA = a$.
  En posant $b = a\sqrt{e^2 - 1}$, on a alors : $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$.
- Cette équation s'appelle l'*équation réduite* de l'hyperbole.
- On a encore $\overrightarrow{OF} = e\,\overrightarrow{OA}$ et $c = ea$, mais ici $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.



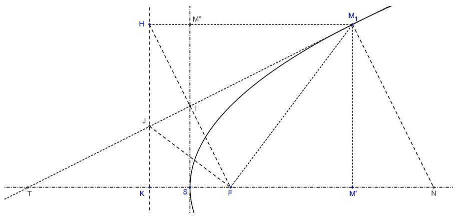
Cas e = 1 : LA PARABOLE	*Cas 0 < e < 1 : L'ELLIPSE*	*Cas e > 1 : L'HYPERBOLE*
	PROBLÈME RÉCIPROQUE	
• Dans un repère orthonormal fixé, la courbe d'équation $y^2 = kx$ est la ***parabole*** ◊ de foyer F de coordonnées $(k/4\ ;\ 0)$, ◊ de directrice d'équation $x = -k/4$ ◊ de paramètre $p = \|k\|/2$.	• Soit a et b tels que $0 < b < a$. On pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Dans un repère orthonormal fixé, la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, est une ***ellipse***, ◊ d'excentricité $e = \frac{c}{a}$, ◊ de foyer F de coordonnées $(c\ ;\ 0)$ ◊ de directrice d'équation $x = \frac{a^2}{c}$. • Remarquons que, a et b étant définis par leurs carrés, si on choisit $a < b < 0$, l'équation précédente est aussi celle de l'ellipse, ◊ d'excentricité $-\frac{c}{a}$, ◊ de foyer F' de coordonnées $(-c\ ;\ 0)$, ◊ de directrice d'équation $x = -\frac{a^2}{c}$. Une ellipse peut donc être définie de deux façons par la méthode « foyer-directrice ». • Les deux foyers et les deux directrices sont respectivement symétriques par rapport à O et aussi aux axes focal et non focal. La longueur $FF' = 2c$ s'appelle la <u>distance focale</u>.	• Soit a et b deux réels. On pose $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dans un repère orthonormal fixé, la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une ***hyperbole***, ◊ d'excentricité $e = \frac{c}{a}$, ◊ de foyer F de coordonnées $(c\ ;\ 0)$, ◊ de directrice d'équation $x = \frac{a^2}{c}$. • Comme pour l'ellipse, l'hyperbole possède un autre foyer F', et une autre directrice, symétriques des premiers par rapport à O. La longueur $FF' = 2c$ est toujours la <u>distance focale</u>.
	ÉQUATIONS CARTÉSIENNES	
• La plus simple représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$ • L'équation réduite étant de la forme $y^2 = 2px$, la parabole est la réunion de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{2px}$, et de sa symétrique par rapport à l'axe des abscisses.	• La plus simple représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $t \in [0\ ;2\pi[$ • L'équation réduite pouvant être mise sous la forme $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)$, l'ellipse est la réunion de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-a\ ;\ a]$ par $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ et de sa symétrique par rapport à l'axe des abscisses. • En posant $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, on a la représentation paramétrique suivante : $\begin{cases} x = a\frac{1-u^2}{1+u^2} \\ y = b\frac{2u}{1+u^2} \end{cases}$, $u \in \mathbf{R}$	• La représentation paramétrique la plus classique est : $\begin{cases} x = \frac{a}{\cos t} \\ y = b\tan t \end{cases}$, $t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ • L'équation réduite pouvant être mise sous la forme $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right)$, l'hyperbole est la réunion de la représentation graphique de la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ -a] \cup [a\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, et de sa symétrique par rapport à l'axe focal. • On peut aussi paramétrer la branche d'hyperbole des points d'abscisses positives par : $\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}(t) = \frac{a}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) \\ y = b\,\mathrm{sh}(t) = \frac{b}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$ • Les fonctions *ch* et *sh* s'appellent, pour cela, respectivement <u>*cosinus hyperbolique*</u> et <u>*sinus hyperbolique*</u>.
	ÉQUATION DE LA TANGENTE	
• Une équation de la tangente à la parabole d'équation $y^2 = 2px$, au point de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ est : $\boxed{yy_0 = p(x + x_0)}$.	• Une équation de la tangente à l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, au point de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ est : $\boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1}$.	• Une équation de la tangente à l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, au point de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ est : $\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1}$.

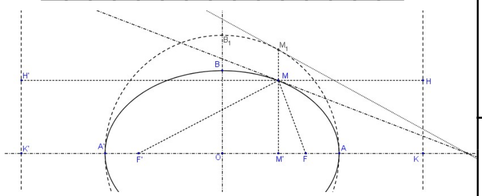
Cas e = 1 : LA PARABOLE

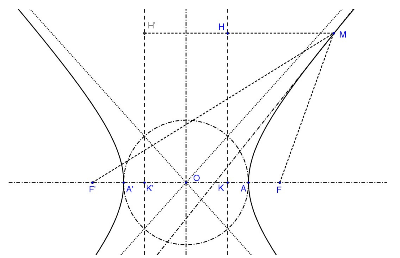
PROPRIÉTÉS

Soit M un point de la parabole (P). H est le projeté orthogonal de M sur (D).

- La parabole est le lieu des centres des cercles tangents à (D) et passant par F.
- La tangente à (P) en M est la médiatrice de $[HF]$ et la bissectrice de $\widehat{FMH}$.
- La tangente à (P) en M, la droite (HF) et la tangente au sommet sont sécantes en I, milieu de $[SM'']$, où M'' est le projeté orthogonal de M sur la tangente au sommet.
- La tangente en M coupant (D) en J et (D) en T, (JF) est perpendiculaire à (FM) et S est le milieu de $[TM']$.
- Pour M distinct de S, la normale à (P) en M (perpendiculaire en M à la tangente à (P) en M) coupant (D) en N, le réel $\overline{M'N}$, appelé <u>*sous-normale*</u> à (P) en M, est constant et égal à p.







Cas 0 < e < 1 : L'ELLIPSE

Soit M un point de l'ellipse (E).

Cas e > 1 : L'HYPERBOLE

Soit M un point de l'hyperbole (H).

POSITION DE LA COURBE

Ellipse

- L'ellipse est entièrement à l'intérieur du rectangle défini par les droites d'équations : $x = a$, $x = -a$, $y = b$ et $y = -b$.

Hyperbole

- L'hyperbole est entièrement à l'extérieur de la bande définie par les droites d'équations respectives : $x = a$ et $x = -a$.
- Les droites d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ sont asymptotes à l'hyperbole.

CERCLES LIÉS À LA COURBE

Ellipse

- On appelle <u>*cercle principal*</u> de (E) le cercle de centre O et de rayon a. Montrer que (E) est l'image de ce cercle par l'<u>*affinité orthogonale*</u> d'axe (D) et de rapport b/a. (une affinité orthogonale d'axe (d) et de rapport k transforme un point M en M' tel que $\overrightarrow{mM'} = k\,\overrightarrow{mM}$, où m est le projeté orthogonal de M sur (d)).
- On appelle <u>*cercle secondaire*</u> de (E) le cercle de centre O et de rayon b. Montrer que (E) est l'image de celui-ci par une affinité à préciser.

Hyperbole

- On appelle <u>*cercle principal*</u> de (H) le cercle de centre O et de rayon a.
- On ne définit pas de cercle secondaire.

CAS PARTICULIERS

Ellipse

- Utiliser le fait que l'affinité orthogonale est une application affine pour transformer quelques propriétés du cercle en propriétés de l'ellipse. En particulier, construire, en utilisant le cercle principal, la tangente en M à (E).
- Remarquer que, si on pose $a = b$ dans l'équation réduite de l'ellipse, on obtient un cercle (de centre O et de rayon a) ; c'est le « cas-limite » où l'on fait tendre e vers 0.

Hyperbole

- Lorsque $a = b$ dans l'équation réduite de (H), l'hyperbole est alors dite <u>*équilatère*</u>. Son excentricité est $\sqrt{2}$.
- C'est le seul cas où les deux asymptotes sont perpendiculaires.
- Par la rotation de centre O et d'angle $\pi/4$, on se ramène à l'hyperbole classique d'équation $y = k / x$

SYMÉTRIES

Ellipse

- Lorsque $a \neq b$, montrer que (E) possède un unique centre de symétrie qui est le point O, appelé <u>*centre*</u> de l'ellipse.
- (E) possède aussi deux axes de symétrie, qui sont l'axe focal (AA') et l'axe non focal (BB'). Les segments $[AA']$ et $[BB']$ sont respectivement appelés le <u>*grand axe*</u> et le <u>*petit axe*</u>. Par confusion volontaire entre segment et mesure, les distances a et b sont parfois appelées <u>*demi grand axe*</u> et <u>*demi petit axe*</u>.

Hyperbole

- (H) possède un unique centre de symétrie qui est le point O, appelé <u>*centre*</u> de l'hyperbole. L'ellipse et l'hyperbole sont ainsi appelées des <u>*coniques à centre*</u> par opposition à la parabole qui n'a pas de centre de symétrie.
- (H) possède aussi deux axes de symétrie, qui sont l'axe focal, aussi appelé <u>*axe transverse*</u>, et la perpendiculaire à l'axe transverse en O, qui est appelé <u>*axe non transverse*</u>.

RÉFLEXIONS

Ellipse

- La courbe d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $0 < a < b$, est aussi une ellipse, avec l'axe des ordonnées pour axe focal.
- On peut l'obtenir à partir de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ par réflexion par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Hyperbole

- La courbe d'équation $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole, avec l'axe des ordonnées pour axe transverse.
- On peut l'obtenir à partir de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ par réflexion par rapport à la droite d'équation $y = x$.

DÉFINITION BIFOCALE

Ellipse

- Montrer, qu'avec les notations précédentes, on a : $MF + MF' = 2a$.
- Réciproquement, montrer que, si $a > c$, l'ensemble des points M vérifiant $MF + MF' = 2a$ est une ellipse de foyers F et F'.
- Étudier les cas $a = c$ et $a < c$.

Hyperbole

- Montrer, qu'avec les notations précédentes, on a : $|MF - MF'| = 2a$.
- Réciproquement, montrer que l'ensemble des points M vérifiant que $|MF - MF'| = 2a$ est une hyperbole de foyers F et F'.

TANGENTE

Ellipse

- On pose $\vec{u}' = \frac{1}{FM}\overrightarrow{FM}$, $\vec{u}'' = \frac{1}{F'M}\overrightarrow{F'M}$ et $\vec{v} = \frac{d\vec{M}}{dt}$.
- Montrer que $(\vec{u}' + \vec{u}'') \cdot \vec{v} = 0$. En déduire que la tangente en M à l'ellipse (E) est la bissectrice extérieure de $\widehat{FMF'}$.

Hyperbole

- On pose $\vec{u}' = \frac{1}{FM}\overrightarrow{FM}$, $\vec{u}'' = \frac{1}{F'M}\overrightarrow{F'M}$ et $\vec{v} = \frac{d\vec{M}}{dt}$.

  Montrer que $(\vec{u}' - \vec{u}'') \cdot \vec{v} = 0$. En déduire que la tangente en M à (H) est la bissectrice intérieure de $\widehat{FMF'}$.