CONIQUES *(Exercices)*

I) PARABOLE

1) Construire les éléments caractéristiques (foyer F et directrice (D)) d'une parabole (P) connaissant :

a) F et deux points de la parabole (P)	b) F et deux tangentes à la parabole (P)
c) F, un point et sa tangente	d) F, un point et une tangente
e) F et le sommet	f) F, l'axe et un point
g) (D) et le sommet	h) F, un point et un point de (D)
i) (D), l'axe et un point	j) (D) et deux points
k) (D), un point et sa tangente	l) (D) et deux tangentes

m) trois tangentes dont celle au sommet

2) Construire les tangentes passant par un point A à une parabole (P) connaissant A, F et (D).

3) Construire la tangente à une parabole, parallèle à une droite (d) donnée, connaissant le foyer et la directrice.

4) Soit (D) une droite. Soit M un point hors de (D). Déterminer le lieu des foyers F, puis des sommets S, des paraboles passant par M et de directrice (D).

5) Soit (P) la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{2a}$. Soit M et M' deux points de (P) d'abscisses respectives u et u'.

a) Déterminer une relation entre u et u' pour que les tangentes respectives à (P) en M et M' soient perpendiculaires.

b) Déterminer le lieu des points d'intersection de ces deux droites. Montrer qu'alors (MM') passe par un point fixe.

6) Soit un point A, une droite (D), un réel $k > 0$. Déterminer le lieu des points dont la différence des carrés des distances à A et à (D) est une constante k .

7) Soit (P) une parabole et soit (D) son axe focal. Soit (d) une droite quelconque, parallèle à (D).

a) Montrer que (d) coupe (P) en un unique point M.

b) Soit (T) la tangente à (P) en M. Soit (T') une droite quelconque, parallèle à (T), coupant (P) en deux points distincts A et B.

c) Montrer que le milieu I de $[AB]$ est sur (d).

d) Montrer que les tangentes respectives à (P) en A et B se coupent sur (d).

8) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on note (D) la droite d'équation $y = \alpha$ (α strictement positif) et (D') la droite d'équation $y = ax$ (a réel non nul).

a) Déterminer les équations cartésiennes de la symétrie d'axe (D) et de direction celle de (D').

b) Soit (P) la parabole d'équation $y^2 = 2px$ ($p > 0$). Soit α un réel non nul. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \alpha$ coupe (P) en un unique point M, que l'on déterminera.

c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (P) en M.

d) Montrer que (P) est globalement invariante par la symétrie s d'axe (D) et de direction celle de (T).

II) ELLIPSE

1) Construire les éléments caractéristiques (foyers F et F', directrices (D) et (D'), ...) d'une ellipse (E) connaissant :

a) les deux foyers et un point M de (E) hors du segment $[FF']$

b) trois sommets

c) les deux foyers et la valeur de a

d) les deux foyers et une tangente

e) les deux foyers et la valeur de b

2) On considère la courbe (C) d'équation

$$x^2 + xy + y^2 = 1.$$

a) Déterminer une équation de cette courbe dans le repère obtenu en faisant subir à $\mathfrak{R}$, repère de départ, une rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

b) Étudier alors la courbe.

3) Soit (E) la courbe d'équation $y^2 = 2x - \dfrac{x^2}{m}$, où m est un réel de $]0\ ;\ 1[$. Déterminer le lieu des sommets, centre et foyers lorsque m varie.

4) On considère les deux points $A(3\ ;\ 0)$ et $B(2\ ;\ 2)$. Déterminer, lorsque t varie, l'ensemble des points M, barycentre de O, A et B affectés des coefficients respectifs $1 - \cos t - \sin t$, $2 + \cos t - 2 \sin t$ et $3 \sin t$.

5) Soit (E) l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Soit $A(2\ ;\ 0)$ et $B(0\ ;\ 3)$. Déterminer l'ensemble des centres de gravité du triangle (ABM) lorsque le point M décrit (E).

6) Montrer que, pour tout point M d'une ellipse (E) de centre O, il existe deux points P et Q de (E) tels que le centre de gravité de (MPQ) est O.

7) Soit un point A, une droite (D), un réel k strictement positif. Déterminer le lieu des points dont la somme des carrés des distances à A et à (D) est constante égale à k .

8) Montrer que le lieu des milieux des segments de longueur 4 ayant une extrémité sur la droite d'équation $y = x$ et l'autre sur la droite d'équation $y = 2x$ est une ellipse d'équation :

$$13y^2 - 36xy + 25x^2 = 4.$$

Préciser ses éléments caractéristiques.

III) HYPERBOLE

1) Construire les éléments caractéristiques (foyers F et F', directrices (D) et (D'), excentricité, ...) d'une hyperbole (H) connaissant :
a) les deux foyers et un point M de (H) qui est hors de $(FF') - [FF']$
b) un foyer et deux sommets
c) les deux foyers et la valeur de a
d) les deux foyers et une tangente

2) Soit A, B et C trois points quelconques distincts d'une hyperbole équilatère (H).
a) Montrer que ces trois points ne peuvent être alignés.
b) Montrer que la tangente en A à (H) est perpendiculaire à la droite (BC).
c) En déduire que l'orthocentre du triangle (ABC) est sur l'hyperbole.

3) Soit (H) une hyperbole équilatère de centre O.
Soit M un point de (H) et M' son symétrique par rapport à O. Le cercle de centre M passant par M' recoupe (H) en A, B et C.
Montrer que (ABC) est un triangle équilatéral.

4) Soit (H) une hyperbole de foyer F et de directrice correspondante (D). Soit P et Q les projetés orthogonaux de F sur les asymptotes.
a) Montrer que P et Q sont sur (D).
b) Montrer que le sommet S, se trouvant entre F et (D), est équidistant des droites (FP), (FQ) et (PQ).

IV) DÉTERMINATION DE CONIQUES

1) Définition : on appelle *courbe du second degré* une courbe dont on peut écrire une équation sous la forme : $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, avec a, b, c, d, e et f six réels.
On va montrer que cette famille de courbes contient les coniques.

Étape 1 : Élimination du terme en « xy »
Si on a déjà $b = 0$, passer à l'étape 2.
Sinon, le repère initial étant $\Re = (O;\vec{i},\vec{j})$, considérons le repère $\Re' = (O\,;\vec{u},\vec{v})$, obtenu à partir de $\Re$ par la rotation r de centre O et d'angle θ.
Montrer que l'équation de la courbe dans le repère $\Re'$ ne contient pas de terme en « xy » si et seulement si $\cot(2\theta) = \frac{c-a}{b}$.

Étape 2 : Élimination des termes en « x » et/ou en « y »
Notons $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ l'équation dans $\Re'$.
- Si $D = 0$ et $E = 0$, passer à l'étape 3.
- Si $A = 0$ et $C = 0$, passer à l'étape 3.
- Si $A = 0$ et $C \neq 0$, montrer que, dans un repère $\Re''$ à préciser, l'équation peut s'écrire $y^2 = 2px$.
- Si $C = 0$ et $A \neq 0$, montrer que, dans un repère $\Re''$ à préciser, l'équation peut s'écrire $x^2 = 2py$.
- Si A et C sont non nuls, montrer que, dans un repère $\Re''$ à préciser, l'équation peut s'écrire $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$.

Étape 3 : Récapitulation
Préciser la nature de la courbe selon les cas étudiés à l'étape 2.
Faire un tableau où seront indiqués dans quel(s) cas on obtient : l'ensemble vide, un point, une droite, « deux » droites confondues, deux droites strictement parallèles, deux droites sécantes, une parabole, une ellipse, une hyperbole, le plan tout entier.

Étape 4 : Conclusion
Préciser, parmi les types de courbes obtenus à l'étape 3, celles que l'on peut effectivement définir comme intersection d'un cône de révolution avec un plan.

2) Déterminer les éléments caractéristiques des coniques qui composent les courbes dont voici des équations cartésiennes :

a) $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$

b) $9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0$

c) $\frac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1$

d) $9y^2 = \left|-4x^2 + 16x + 20\right|$

e) $16x|x| + 36y|y| = 576$

f) $\left|16x^2 + 96x - 256\right| = 25y^2$

g) $y = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8 + 2x - x^2}$

h) $y = \sqrt{\left|x^2 - 6x + 5\right|}$

i) $\left|(|x|-1)(|y|-1)\right| = 1$

V) DIVERS

1) Soit (C) une conique de foyer F et de directrice correspondante (D). M étant un point quelconque de (C), la droite (FM) coupe (D) en M'.
Montrer que $\frac{1}{FM} - \frac{1}{FM'}$ est constante.

2) a) Étudier, selon les valeurs des réels u, v et w, le nombre de points d'intersection de la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ avec chacune des coniques suivantes :

- la parabole d'équation $y^2 = 2px$
- l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u, v et w pour que la droite soit tangente à la conique. [L'équation liant u, v et w s'appelle alors l'*équation tangentielle* de la courbe.]