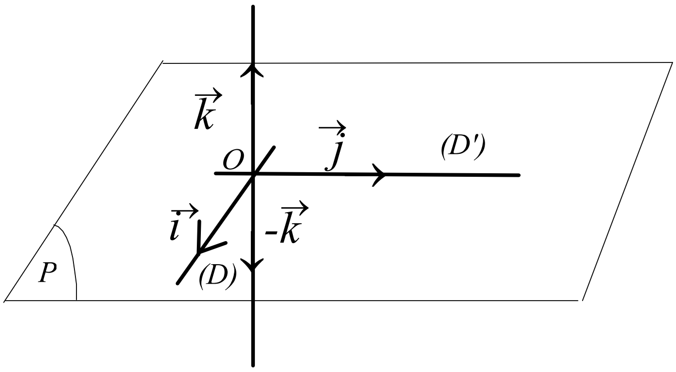
PRODUIT VECTORIEL

I) Orientation dans l'espace

- L'espace (*E*) est défini par quatre de ses points non coplanaires. On notera $\left(\vec{E}\right)$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, où *M* et *N* sont deux points quelconques de (*E*).
- Cette notation sera utilisée plus loin pour les plans et les droites.
- Soit (*P*) un plan de (*E*) et $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthonormé de (*P*). On démontre et nous admettrons qu'il existe une unique droite (*D*), perpendiculaire à (*P*) au point *O*. Cette droite est caractérisée par le fait d'être perpendiculaire simultanément à $\left(O\,;\vec{i}\right)$ et à $\left(O\,;\vec{j}\right)$ en *O*.
- Nous savons que $\left(\vec{D}\right)$ a deux vecteurs unitaires, qui sont $\vec{k}$ et $-\vec{k}$. Chacun de ces vecteurs forme avec $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une *<u>base orthonormée</u>* de l'espace et est appelé vecteur unitaire *<u>normal</u>* au (ou du) plan (*P*).
- De plus, le choix de l'une des bases $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ou $\left(\vec{i},\vec{j},-\vec{k}\right)$ définit l'*<u>orientation</u>* de $\left(\vec{E}\right)$ et de (*E*).



- Sur le schéma, on choisit habituellement $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$: c'est l'orientation donnée par *<u>l'indicateur d'Ampère</u>*, ou encore « *règle des trois doigts de la main droite* », où le pouce, l'index et le majeur peuvent symboliser respectivement les trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.
- Dans ce cas, $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est une base orthonormée <u>directe</u> de $\left(\vec{E}\right)$ et $\left(\vec{i},\vec{j},-\vec{k}\right)$ est <u>indirecte</u>. $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est appelé *<u>repère orthonormé direct</u>* de (*E*).
- Étant donné un couple de vecteurs unitaires orthogonaux $\left(\vec{I},\vec{J}\right)$, il existe alors un unique vecteur unitaire $\vec{K}$ tel que $\left(\vec{I},\vec{J},\vec{K}\right)$ soit une base orthonormée directe de $\left(\vec{E}\right)$.
- On dit que l'orientation du plan (*P*), de repère $\left(O\,;\vec{I},\vec{J}\right)$, telle que $\left(\vec{I},\vec{J}\right)$ est une base directe, est l'orientation associée à $\vec{K}$ dans l'espace orienté par la base $\left(\vec{I},\vec{J},\vec{K}\right)$. Ou encore : la demi-droite $\left[O\,;\vec{K}\right)$ est la *<u>demi-normale positive</u>* du plan orienté par la base directe $\left(\vec{I},\vec{J}\right)$) (paradoxalement, dans l'espace, on ne peut définir l'orientation d'un plan sans « en sortir »).
- Si $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est directe, alors $\left(\vec{j},\vec{k},\vec{i}\right)$ et $\left(\vec{k},\vec{i},\vec{j}\right)$ le sont aussi, alors que $\left(\vec{i},\vec{k},\vec{j}\right)$, $\left(\vec{j},\vec{i},\vec{k}\right)$ et $\left(\vec{k},\vec{j},\vec{i}\right)$ sont indirectes.

II) Produit vectoriel

1) Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{E}$, espace orienté. On appelle *<u>produit vectoriel</u>* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le <u>vecteur</u>, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ (ou parfois $\vec{u}\times\vec{v}$), tel que :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (donc en particulier non nuls), alors :

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)\right)\vec{k}},$$

où, $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ étant une base orthonormée directe de l'espace, le plan vectoriel de base $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ est orienté par la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$. ($\vec{k}$ est donc le vecteur unitaire de la demi-normale positive de ce plan).

- Cette définition est cohérente car elle ne dépend pas de la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ choisie dans le plan vectoriel de base $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.
- En effet, soit $\left(\vec{I},\vec{J}\right)$ une autre base orthonormée de ce plan orienté :
  - si $\left(\vec{I},\vec{J}\right)$ est directe, alors $\sin\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ et $\vec{k}$ sont inchangés.
  - si $\left(\vec{I},\vec{J}\right)$ est indirecte, alors $\sin\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ et $\vec{k}$ sont tous deux changés en leurs opposés, et leur produit reste inchangé.

2) Propriétés :

a) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est le vecteur nul.

b) Le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
En particulier, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux et unitaires, alors $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$ est une base orthonormée directe de $\left(\vec{E}\right)$.

c) Si $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe de $\left(\vec{E}\right)$, alors :

$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}\ ,\ \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}\ ,\ \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}\ ,$$

$$\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}\ ,\ \vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}\ \text{ et }\ \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$$

d) Pour tout couple $(\vec{u},\vec{v})$ de $\left(\vec{E}\right)^2$, $\boxed{\vec{v}\wedge\vec{u}=-(\vec{u}\wedge\vec{v})}$

e) Pour tout triplet de vecteurs $(\vec{u},\vec{v},\vec{v}')$ de $\left(\vec{E}\right)^3$, pour tout réel α,

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{v}')=(\vec{u}\wedge\vec{v})+(\vec{u}\wedge\vec{v}')\ \text{ et}$$

$$\vec{u}\wedge(\alpha\vec{v})=(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v}).$$

3) Expression analytique du produit vectoriel, dans une base orthonormée directe $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

Si $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$, alors :

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v}=(yz'-y'z)\,\vec{i}+(zx'-z'x)\,\vec{j}+(xy'-x'y)\,\vec{k}}$$

ou encore $\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}}$

4) Applications :

a) On peut construire une base orthonormée directe de l'espace, en choisissant un vecteur unitaire quelconque $\vec{u}$, puis un vecteur unitaire $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$, puis le produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

b) On peut reconnaître analytiquement que deux vecteurs sont colinéaires (mais il y a plus simple !).

c) La norme de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est l'aire du <u>parallélogramme</u> ($ABCD$) avec A quelconque, B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et D tel que $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. Cette norme est aussi deux fois l'aire du <u>triangle</u> (ABD).

d) Soit (P) le plan de repère $(A\,;\vec{u},\vec{v})$. On en obtient une équation cartésienne grâce à :
M élément de (P) si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})=0$, car $\overrightarrow{AM}$, vecteur de (P), est orthogonal à $\vec{u}\wedge\vec{v}$, vecteur normal de (P) et réciproquement.

e) Le <u>réel</u> $\vec{u}\,.\,(\vec{v}\wedge\vec{w})$ est appelé <u>*produit mixte*</u> des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On montre que ce réel vaut aussi $(\vec{u}\wedge\vec{v})\,.\,\vec{w}$. On le note $(\vec{u}\mid\vec{v}\mid\vec{w})$ ou encore simplement $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

f) Le réel positif $\left|(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\right|$ (valeur absolue du produit mixte) est le <u>volume du parallélépipède</u> construit sur les arêtes [AB], [AC] et [AD] avec A quelconque, $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$.

g) Le produit mixte peut aussi servir à savoir si une <u>base orthonormée</u> est <u>directe ou indirecte</u> : Une base orthonormée $\left(\vec{I},\vec{J},\vec{K}\right)$ est directe (respectivement indirecte) si et seulement si $\vec{I}\cdot\left(\vec{J}\wedge\vec{K}\right)=1$ (resp. -1).

h) Même lorsqu'on est dans le plan, il peut être utile de se « ramener » à l'espace :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un plan $\left(\vec{P}\right)$, orienté par une base orthonormée directe $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ et $\vec{v}=c\vec{i}+d\vec{j}$. Considérons ce plan dans l'espace (E), orienté également, et soit $\vec{k}$ le vecteur unitaire de la demi-normale positive de (P) dans (E). On a alors : $\vec{u}\wedge\vec{v}=(ad-bc)\,\vec{k}$.
On retrouve alors : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v})=ad-bc=0$.

On a, dans le cas général,

$$\boxed{\det(\vec{u}\,;\vec{v})=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\sin(\vec{u}\,;\vec{v})}.$$

i) **Théorème de Lagrange**

On a : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\left|\sin(\vec{u}\,;\vec{v})\right|$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}\,;\vec{v})$,
d'où, grâce à la formule $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, on obtient :

$$\boxed{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2\times\|\vec{v}\|^2}.$$

III) Application : Distances dans l'espace

- **Définition préliminaire** :
Soit (E) et (F) deux ensembles de points.
On appelle **distance** entre (E) et (F) la distance minimale entre un point de (E) et un point de (F).
On la note $l=d((E),(F))$

1) Distance d'un point à une droite

Soit $(D)=(A\,;\vec{u})$ une droite et M un point.
On note $l=d(M,(D))$.

a) Montrer que l est la distance de M à H, projeté orthogonal de M sur (D).

b) Montrer que $\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}=\overrightarrow{MH}\wedge\vec{u}$, puis calculer la norme de ce vecteur en fonction de M, A et $\vec{u}$.

c) Déterminer l'expression de la distance l en fonction de M, H et $\vec{u}$.

2) Distance d'un point à un plan

- Soit $(P)=(A\,;\vec{u},\vec{v})$ un plan et M un point.
On note $l=d(M,(P))$.

a) Montrer que l est la distance de M à H, projeté orthogonal de M sur (P).

b) Montrer que $\left(AM, \vec{u}, \vec{v}\right) = \left(HM, \vec{u}, \vec{v}\right)$ [produits mixtes], puis calculer la valeur absolue de ce réel en fonction de *HM* et $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

c) Déterminer l'expression de *l* en fonction de *M*, *A* et $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

d) En rapportant l'espace à un repère orthonormé direct $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, (*P*) a pour équation $ax + by + cz + d = 0$ et *M* pour coordonnées x_0, y_0 et z_0. Déterminer l'expression de *l* en fonction de ces données.

3) Perpendiculaire commune

- **Définition** : Soit (*D*) et (*D'*) deux droites. (Δ) est une *perpendiculaire commune* à (*D*) et à (*D'*) si et seulement si (Δ) est perpendiculaire à (*D*) et à (*D'*) (donc leur est sécante). On note $(D) = (A ; \vec{u})$ et $(D') = (B ; \vec{v})$ (on les suppose distinctes).

a) On suppose ici (*D*) et (*D'*) parallèles. Déterminer l'ensemble des perpendiculaires communes.

b) On suppose ici (*D*) et (*D'*) sécantes en *I*. Déterminer l'ensemble des perpendiculaires communes.

c) On suppose ici (*D*) et (*D'*) non coplanaires. On note (*P*) (resp. (*P'*)) le plan contenant (*D*) (resp. (*D'*)) et parallèle à (*D'*) (resp. à (*D*)). On note aussi (*Q*) (resp. (*Q'*) le plan contenant (*D*) (resp. (*D'*)) et perpendiculaire à (*P'*) (resp. à (*P*)). Faire un dessin.

d) Montrer l'existence et l'unicité de (Δ).

e) On note respectivement *H* et *K* les points d'intersection de (Δ) avec (*D*) et (*D'*). On pose $\vec{u} = \|\vec{u}\| \vec{i}$ et $\vec{v} = \|\vec{v}\| \vec{j}$. On note *a* et *b* les deux réels tels que $\overrightarrow{AH} = a\vec{i}$ et $\overrightarrow{BK} = b\vec{j}$. $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ formant une base des plans vectoriels associés à (*P*) et à (*P'*), on définit le vecteur $\vec{k}$ unitaire tel que $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ forme une base directe de l'espace en posant $\vec{i} \cdot \vec{j} = \cos\theta$ et $\vec{i} \wedge \vec{j} = (\sin\theta)\vec{k}$. Calculer $\overrightarrow{AB} . \vec{i}$ *et* $\overrightarrow{AB} . \vec{j}$ en fonction de *a*, *b* et cos θ, puis déterminer *a* et *b* en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\sin\theta$.

f) Prouver la formule dite du *double produit vectoriel* :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

g) Utiliser la formule précédente pour déterminer $\vec{i} \wedge \vec{k}$ et de $\vec{j} \wedge \vec{k}$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et θ.

h) En déduire que :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\left(\overrightarrow{AB}, \vec{j}, \vec{k}\right)}{\sin\theta}\vec{i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BK} = \frac{\left(\overrightarrow{AB}, \vec{i}, \vec{k}\right)}{\sin\theta}\vec{j}.$$

i) Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}, \vec{i}, \vec{j}\right) = \sin\theta\left(\overrightarrow{HK} \cdot \vec{k}\right)$, et que $\overrightarrow{HK} = \left(\overrightarrow{AB} \cdot \vec{k}\right)\vec{k}$.

4) Distance de deux droites

- Soit deux droites $(D) = (A ; \vec{u})$ et $(D') = (B ; \vec{v})$.

  On note *l* = *d*((*D*), (*D'*)).

a) On suppose ici (*D*) et (*D'*) sécantes en *I*. Déterminer alors *l*.

b) On suppose ici (*D*) et (*D'*) parallèles.
Montrer que : $l = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$.

c) On suppose ici (*D*) et (*D'*) non coplanaires. On note respectivement *H* et *K* les points d'intersection de (*D*) et (*D'*) avec leur perpendiculaire commune, notée (Δ), *[voir le paragraphe sur le perpendiculaire commune].*

Soit *M* un point quelconque de (*D*) et *N* un point quelconque de (*D'*).

Soit *N*' le projeté orthogonal de *N* sur (*P*), plan contenant (*D*) et parallèle à (*D'*).

Montrer que *NN'* = *HK*, et que $MN \geq HK$.

d) Conclure en montrant que :

$$d((D), (D')) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right)\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}.$$

5) Distance de deux plans

- Soit deux plans (*P*) et (*P*'). On note *l* = *d*((*P*), (*P*')).

a) On suppose ici (*P*) et (*P'*) sécants. Déterminer alors la valeur de *l*.

b) On suppose ici (*P*) et (*P'*) parallèles.
On note $(P) = (A ; \vec{u}, \vec{v})$ et $(P') = (B ; \vec{u}, \vec{v})$.
Utiliser les paragraphes précédents pour exprimer cette distance en fonction des données.

c) En rapportant l'espace à un repère orthonormé direct $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, les plans ont pour équations respectives :

$$(P) : ax + by + cz + d = 0$$
$$\text{et } (P') : ax + by + cz + d' = 0.$$

Déterminer la distance *l* des deux plans en fonction de *a*, *b*, *c*, *d* et *d'*.