QUELQUES CALCULS D'AIRES

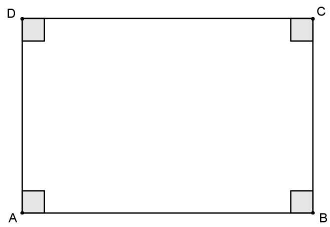
Remarques préliminaires :

Il est fréquent, en langage courant, et même parfois en mathématiques, de confondre deux notions pourtant bien différentes : **un objet et la mesure de cet objet**.
Ainsi, on va étudier ici des objets plans appelés ***surfaces***, comme un disque ou l'intérieur d'un rectangle, puis calculer leur ***aire*** (ou leur ***superficie***), qui est un nombre, avec une unité qui peut être par exemple le mètre carré (m²).
De même pour un segment, on devrait dire « un carré de **longueur de côté** 10 cm », alors qu'on dit souvent, par désir d'allégement, « un carré de **longueur** 10 cm ».
Enfin, on voit apparaître cette confusion, parfois tolérée, dans certains objets liés aux triangles :
par exemple, une hauteur d'un triangle est à la fois une droite, un segment, et la longueur de ce segment.
C'est le contexte qui permettra de savoir duquel des trois on est en train de parler.
De même, il faut parler « d'angle de **mesure** 60° » et non « d'angle de 60° », même si la coutume le tolère…

1) Les deux formules de base : Les aires d'un rectangle et d'un disque

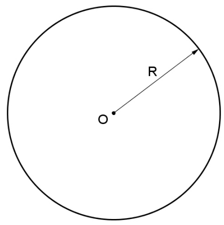
a) **Aire d'un rectangle**

Un rectangle,
de longueur $AB = CD = a$
et de largeur $AD = BC = b$,
a pour aire $\boxed{a \times b}$.



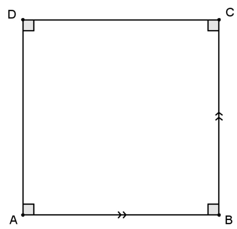
b) **Aire d'un disque**

Un disque (intérieur d'un cercle), de rayon R, a pour aire $\boxed{\pi \times R^2 = \pi R^2}$.



Remarque : Lorsqu'on parlera de l'aire d'une figure géométrique, définie par une courbe fermée, on parlera en fait de l'aire de l'intérieur de cette courbe. Ainsi, l'expression « *l'aire d'un rectangle* » signifie l'aire de l'**intérieur** de ce rectangle. La plus fréquente différence de vocabulaire utilisée entre un objet fermé et son intérieur concerne le **disque**, qui est l'intérieur du **cercle**.

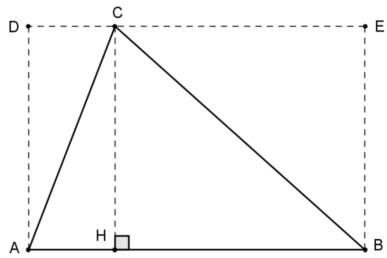
2) Conséquences de la formule de l'aire d'un rectangle



a) **Aire d'un carré**

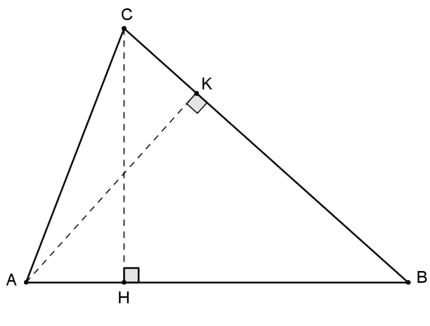
Un carré est un rectangle dont deux côtés adjacents sont de même longueur, a.
Donc l'aire d'un carré de longueur (de côté) a est $a \times a = \boxed{a^2}$.
On remarquera que a^2 se lit justement « a au carré ».

b) **Aire d'un triangle**



Un triangle peut être considéré comme un « demi-rectangle ».
En effet, la hauteur $[CH]$ issue de C du triangle (ABC) a même mesure que les largeurs $[AD]$ et $[BE]$ du rectangle ($ABCD$). Les triangles (AHC) et (ADC) sont symétriques par rapport au milieu de $[AC]$ et sont ainsi de même aire.
De même pour (BCH) et (BCE).
Donc l'aire du triangle (ABC) vaut $\boxed{\frac{1}{2} \times AB \times CH}$, ou encore : $\boxed{\dfrac{base \times hauteur}{2}}$.

c) **Remarque :** *Comment utiliser la formule de l'aire d'un triangle pour calculer une hauteur de ce triangle ?*



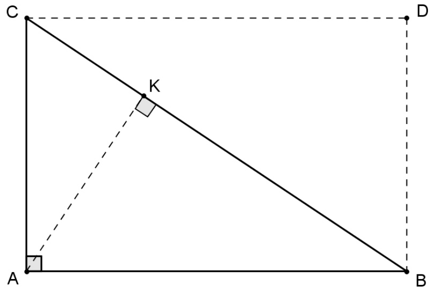
Il y a, dans un triangle, trois « bases » (côtés) et trois hauteurs associées, donc trois possibilités pour calculer l'aire d'un triangle avec ces données.
En particulier, $\frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times BC \times AK$.
Donc, si on connaît par exemple les longueurs AB, BC et CH, on peut calculer la hauteur AK : $AB \times CH = BC \times AK$, donc $\boxed{AK = \dfrac{AB \times CH}{BC}}$.

d) **Aire d'un triangle rectangle :**

La hauteur est ici l'un des côtés. Le triangle apparaît clairement comme un « demi-rectangle », donc l'aire du triangle rectangle est : $\boxed{\dfrac{AB \times AC}{2}}$.

La hauteur AK peut s'exprimer en fonction des longueurs de côtés :

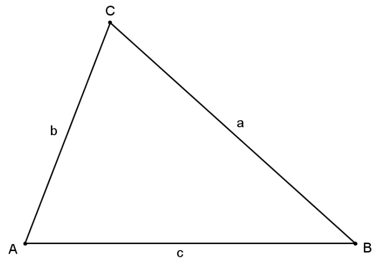
$AK = \dfrac{AB \times AC}{BC} = \dfrac{AB \times AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}$, grâce au théorème de Pythagore.



e) **Formule de Héron**

Si on note respectivement a, b et c les longueurs des côtés [BC], [CA] et [AB], l'aire S du triangle (ABC) peut être obtenue grâce à la formule, dite de Héron *[Héron d'Alexandrie, grec, environ 100 apr. J.-C.]*, dans laquelle p désigne le demi-périmètre $\dfrac{a+b+c}{2}$: $\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

Cette formule peut être démontrée en classe de Première.



f) **Aire d'un triangle équilatéral**

Un triangle équilatéral a ses trois cotés de même longueur a.

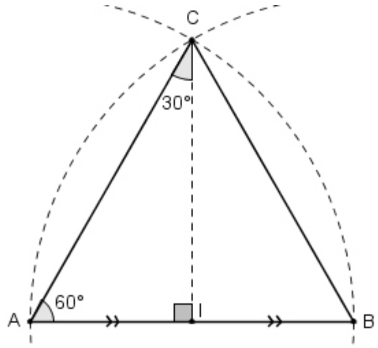
Les mesures de ses trois angles valent 60 degrés.

Le point I, pied de la hauteur issue de C, est aussi le milieu de [AB].

Pour calculer la hauteur IC en fonction de a, on peut se placer dans le triangle rectangle (AIC) et appliquer le théorème de Pythagore : $AC^2 = AI^2 + IC^2$,

donc $a^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + IC^2$, donc $IC^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$, donc enfin $IC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

L'aire du triangle (ABC) est donc $\dfrac{1}{2} \times AB \times IC = \dfrac{1}{2} \times a \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2}$.



Remarques : On a ainsi prouvé que $sin(60°) = cos(30°) = \dfrac{IC}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

En appliquant la formule de Héron, on a $p = \dfrac{3a}{2}$ et ainsi on a bien : $S = \sqrt{\dfrac{3a}{2} \times \left(\dfrac{a}{2}\right)^3} = \sqrt{\dfrac{3a^4}{2^4}} = \dfrac{\sqrt{3}\,a^2}{4}$.

g) **Aire d'un trapèze**

Le trapèze ($ABCD$) a ses côtés [AB] et [CD] parallèles.

On note $AB = L$, $CD = L'$ et h la « hauteur », qui vaut AE, GD, HC et BF.

Le trapèze est constitué d'un rectangle et de deux triangles rectangles.

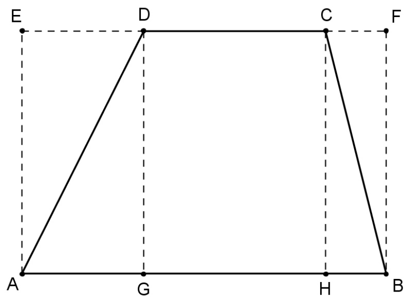
Notons quelques instants d la longueur AG. (d disparaîtra dans la formule finale)

On a $GH = DC = L'$ et donc $HB = AB - AG - GH = L - d - L'$.

L'aire S du trapèze est donc : $\left(\dfrac{d \times h}{2}\right) + (L' \times h) + \left(\dfrac{(L - d - L') \times h}{2}\right)$,

donc, en factorisant par $\dfrac{h}{2}$, $S = \dfrac{h}{2} \times (d + 2L' + L - d - L') = \dfrac{h}{2} \times (L + L')$.

D'où la formule $\boxed{S = \left(\dfrac{L + L'}{2}\right) \times h}$



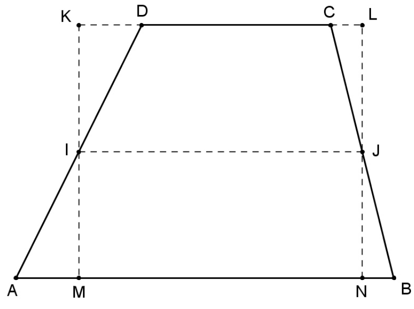
h) **Autre formule de l'aire d'un trapèze**

Considérons les points I et J, milieux respectifs des côtés [AD] et [BC].

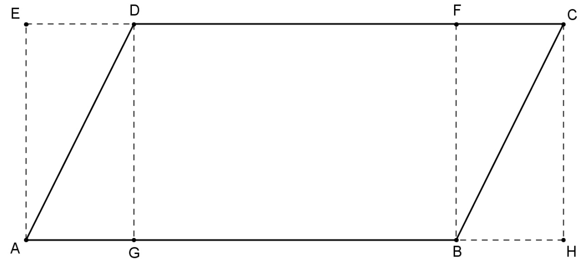
On remarque alors que les triangles (AIM) et (DIK) sont symétriques par rapport à I et donc de même aire. Même remarque pour le point J.

En faisant « pivoter » les triangles (AIM) et (BJN) autour respectivement de I et de J, on remarque que le trapèze a même aire que le rectangle ($MNLK$). Donc $S = IJ \times h$.

On remarquera qu'alors on a prouvé que $IJ = \dfrac{L + L'}{2}$.



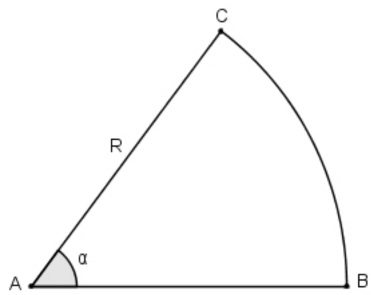
i) **Aire d'un parallélogramme**



Un parallélogramme est un cas particulier de trapèze : c'est le cas où $L' = L$. Les deux autres côtés sont alors aussi parallèles. Si on note $L = AB = DC$, et $h = GD = BF$, alors on a : $\boxed{S = L \times h}$.
On peut trouver ce résultat directement en remarquant que les triangles rectangles (AED) et (BHC) ont même aire, et qu'ainsi le parallélogramme a même aire que le rectangle ($ABFE$).

3) Conséquences de la formule de l'aire d'un disque

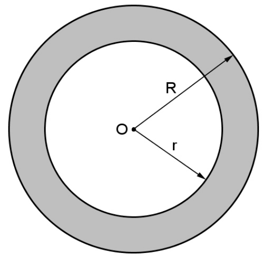
a) **Aire d'un secteur circulaire**



L'aire d'un secteur circulaire de rayon R et d'angle de mesure α (exprimé en degrés) peut s'obtenir grâce à un tableau de proportionnalité par rapport au disque entier.
En effet, puisque l'angle plein vaut 360°, et que l'aire du disque vaut $\pi \times R^2$, l'aire S du secteur circulaire vérifie : $\dfrac{S}{\pi \times R^2} = \dfrac{\alpha}{360}$, donc $\boxed{S = \dfrac{\alpha}{360} \times \pi R^2}$

Remarque : La proportionnalité citée fonctionne sur α, mais pas sur les longueurs de segments, que ce soit pour les rayons ou les longueurs côtés d'un triangle. Ainsi, un disque de rayon deux fois plus grand a une aire quatre fois (2^2) plus grande que le disque initial. Cela est dû au fait que, dans la formule de l'aire, le rayon R apparaisse au carré. Dans le cas général, si le rayon est multiplié par le nombre k, l'aire est multipliée par k^2.

b) **Aire d'une couronne**

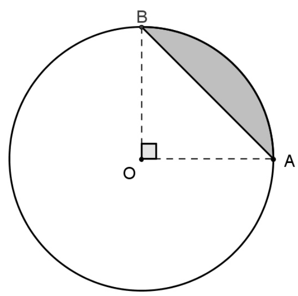


Une couronne est la partie qui est comprise entre deux disques concentriques (c'est-à-dire ayant le même centre).
Considérons deux cercles de même centre O et de rayons respectifs R et r, avec $R > r$.
L'aire de la couronne est alors $S = \left(\pi R^2\right) - \left(\pi r^2\right)$, qu'on peut aussi écrire $\boxed{S = \pi\left(R^2 - r^2\right)}$.

4) Les lunules

Une lunule est une surface entre un arc de cercle et une corde de ce cercle. Deux exemples :

a) **Aire d'une lunule « à angle droit »**



Ici, les deux extrémités de la corde sont les sommets, avec le centre du cercle, d'un triangle rectangle. Calculons l'aire de cette lunule en fonction du rayon R du cercle.

Le secteur circulaire $\left(O\widehat{AB}O\right)$ est un quart de disque, donc a pour aire $\dfrac{1}{4}\pi R^2$.

Le triangle rectangle (OAB) a pour aire $\dfrac{1}{2}R^2$. Donc la lunule a pour aire $\boxed{\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right)R^2}$.

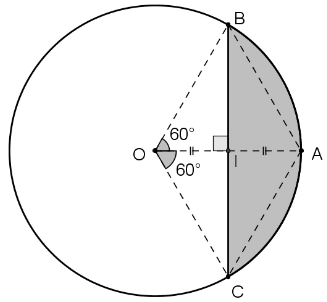
Remarques : *(Calcul de l'aire de la zone blanche et pourcentages, arrondis à l'entier)*

La proportion que représente cette lunule par rapport au disque entier est $\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right)R^2}{\pi R^2} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2\pi} \approx 9\,\%$.

Le reste du disque a donc pour aire $\pi R^2 - \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right)R^2 = \left(\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\right)R^2$.

Le quotient des aires des deux zones (gris sur blanc) a pour valeur $\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right)R^2}{\left(\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\right)R^2} = \dfrac{\pi - 2}{3\pi + 2} \approx 10\,\%$.

b) **Aire d'une lunule « en médiatrice de rayon »**



Ici, la corde en question est contenue dans la médiatrice d'un rayon du cercle.
Calculons l'aire de cette lunule en fonction du rayon R du cercle.
On a $OA = OB = OC = R$. De plus, la droite (BC) est la médiatrice de $[OA]$ donc $BO = BA = CO = CA$. Ainsi, les triangles (OAB) et (OAC) sont équilatéraux et donc $A\hat{O}B = A\hat{O}C = 60°$, donc $B\hat{O}C = 120°$. Cet angle étant un tiers de l'angle plein, l'aire du secteur circulaire $\left(O\widehat{BCO}\right)$ vaut donc $\frac{\pi}{3} R^2$.

Par ailleurs, l'aire du triangle (OBC) vaut $\frac{1}{2} OI \times BC = OI \times IB$. Or $OI = \frac{1}{2} R$ car I est le milieu de $[OA]$.

De plus, on a vu que la hauteur d'un triangle équilatéral de longueur de côté R vaut et $\frac{\sqrt{3}}{2} R$.

Donc $BC = 2\,BI = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} R\right) = \sqrt{3}\,R$. Donc l'aire du triangle (OBC) vaut $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} R\right) \times \left(\sqrt{3}\,R\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2$.

On remarquera que c'est la même aire que celle du triangle (OAB), puisque les triangles (OIC) et (AIB) sont symétriques par rapport à I et ont même aire. Ainsi, l'aire de la lunule $\left(B\widehat{AC}B\right)$ vaut $\boxed{\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2}$.

Remarques : *(Calcul de l'aire de la zone blanche et pourcentages, arrondis à l'entier)*

La proportion que représente cette lunule par rapport au disque entier est $\dfrac{\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2}{\pi R^2} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx 20\,\%$.

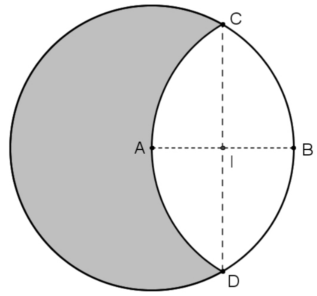
L'aire de l'autre partie vaut $\pi R^2 - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2 = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2$.

Le quotient des aires des deux zones (gris sur banc) a pour valeur $\dfrac{\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2}{\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2} = \dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}} \approx 24\,\%$.

5) Les croissants et les « champs de la chèvre attachée »

Un croissant est ici une surface intérieure à un disque et extérieure à un autre disque dont le centre est sur le premier cercle. L'autre partie du premier disque peut être considérée comme la partie d'un champ circulaire (premier disque) qui est accessible à une chèvre attachée au bord du champ avec une corde de longueur fixée. Deux exemples :

a) Aire du croissant passant par le centre



Ici, le deuxième disque passe par le centre A du premier.
En utilisant les propriétés vues dans la figure précédente, on remarque que (CD) est la médiatrice de $[AB]$. La partie blanche du grand disque (le champ de la chèvre) est constitué de la lunule vue précédemment et de sa symétrique par rapport à (CD), de même aire que la lunule. Son aire est donc $2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2 = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) R^2$.

Le croissant a donc pour aire $\pi R^2 - \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) R^2 = \boxed{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) R^2}$

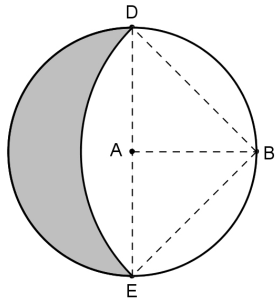
Remarques : *(Calcul de l'aire de la zone blanche et pourcentages, arrondis à l'entier)*

La proportion que représente ce croissant par rapport au disque entier est $\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2}{\pi R^2}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}\approx 61\,\%$.

Pour le champ de la chèvre, cette proportion est donc $\dfrac{2}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}\approx 39\,\%$.

Le quotient des aires des deux zones (gris sur blanc) a pour valeur $\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2}{\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2}=\dfrac{2\pi+3\sqrt{3}}{4\pi-3\sqrt{3}}\approx 156\,\%$.

b) Aire du croissant « perpendiculaire »



Ici, le deuxième disque passe par les extrémités D et E du diamètre perpendiculaire au rayon contenant son centre B.
On va en fait, comme précédemment, calculer l'aire du complémentaire, donc de la partie blanche : on peut considérer qu'elle est constituée d'un secteur circulaire $\left(B\widehat{E}\widehat{D}B\right)$ et des deux lunules de cordes [BD] et [BE].
Les triangles (ABD) et (ABE) sont isocèles rectangles car $AB = AD = AE$, et le rayon et le diamètre sont perpendiculaires par hypothèse.

Donc $A\hat{B}D = A\hat{B}E = 45°$, donc $D\hat{B}E = 90°$. On peut directement obtenir ce résultat en remarquant que le triangle (BDE) est inscrit dans un demi-cercle (car [DE] diamètre et B sur le cercle), et qu'il est donc rectangle en B.

De plus, [BD] est l'hypoténuse du triangle (ABD), avec $AB = AD = R$, donc, d'après le théorème de Pythagore, $BD^2 = AB^2 + AD^2 = R^2 + R^2 = 2\,R^2$, d'où $BD = \sqrt{2}\,R$. Le secteur circulaire $\left(B\widehat{E}\widehat{D}B\right)$ a donc pour aire $\dfrac{90}{360}\pi\,BD^2 = \dfrac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}\,R\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}\left(2\,R^2\right) = \dfrac{\pi}{2}R^2$. Les aires des deux lunules ont déjà été calculées et valent chacune $\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\right)R^2$, donc le secteur blanc a pour aire : $\dfrac{\pi}{2}R^2 + 2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\right)R^2 = (\pi-1)\,R^2$. Le croissant a donc pour aire : $\pi R^2 - (\pi-1)\,R^2 = \boxed{R^2}$. On remarquera que le croissant a même aire que le triangle (BDE).

Remarques :

La proportion que représente ce croissant par rapport au disque entier est $\dfrac{R^2}{\pi R^2}=\dfrac{1}{\pi}\approx 32\,\%$.

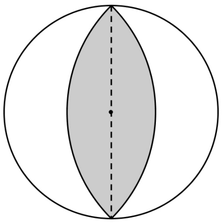
Pour le champ de la chèvre, cette proportion est donc $1-\dfrac{1}{\pi}\approx 68\,\%$.

Le quotient des aires des deux zones (gris sur blanc) a pour valeur $\dfrac{R^2}{(\pi-1)\,R^2}=\dfrac{1}{\pi-1}\approx 47\,\%$.

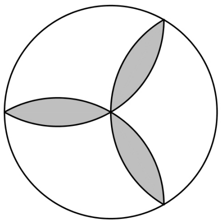
6) Quelques exercices de calcul d'aires

Dans les cas suivants, calculer l'aire de la figure en gris en fonction des données, ainsi que la valeur exacte, et le pourcentage arrondi à l'unité, que représente cette figure par rapport à la figure globale.

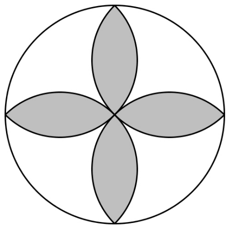
a) **L'œil de chat** (disque de rayon R)



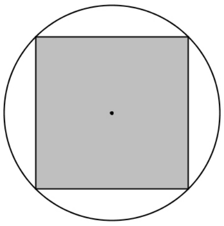
b) **La rosace à trois branches**



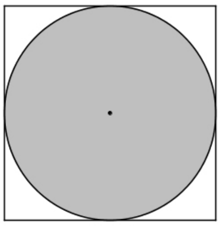
c) **La rosace à quatre branches**



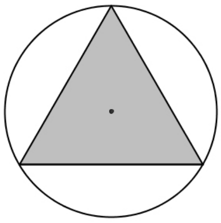
d) **Un carré inscrit dans un disque** de rayon R



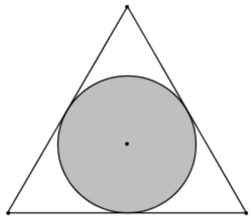
e) **Un disque inscrit dans un carré** de longueur de côté a



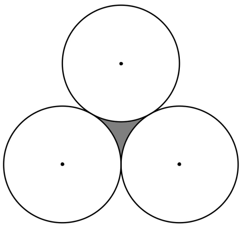
f) **Un triangle équilatéral inscrit dans un disque** de rayon R



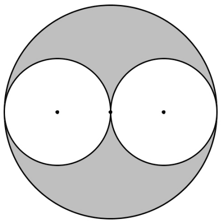
g) **Un disque inscrit dans un triangle équilatéral** de longueur de côté a



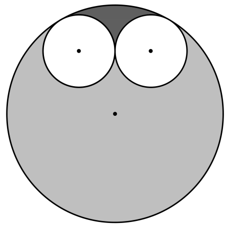
h) Surface comprise entre **trois cercles de même rayon R, tangents extérieurement deux à deux**



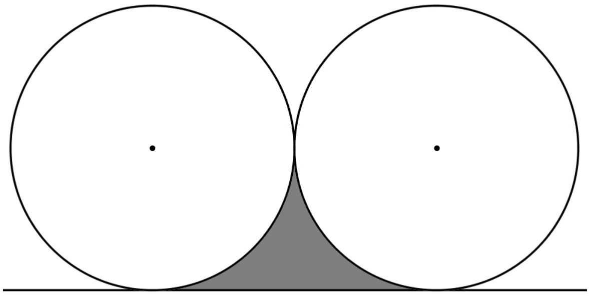
i) Surface comprise entre **trois cercles, dont deux ont même rayon R et sont tangents extérieurement, et tangents intérieurement à un troisième cercle, de rayon $2R$**



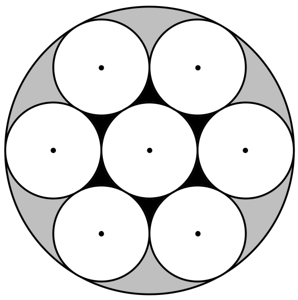
j) Même cas que précédemment avec un **grand cercle de rayon $3R$**



k) Surface comprise entre **deux cercles de même rayon R, tangents extérieurement, et une droite tangente aux deux cercles parallèlement à l'axe des centres des cercles**

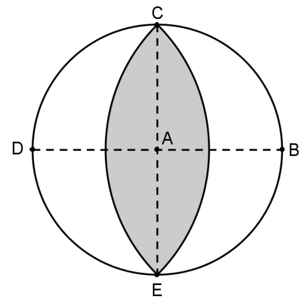


l) Interstices intérieurs et de bordure d'un « **barillet** », composé d'un disque de rayon $6R$, contenant sept cercles de même rayon R, dont l'un a même centre que le grand cercle, et les six autres sont tous tangents extérieurement au cercle central, tous tangents intérieurement au grand cercle, et enfin tangents extérieurement à deux de ces six cercles



7) Corrigés des exercices

a) **L'œil de chat** (disque de rayon R)



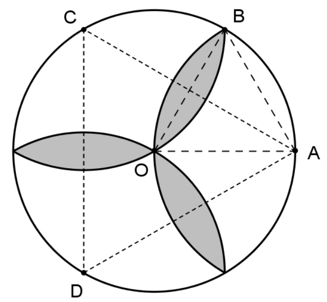
La surface grisée est le complémentaire dans le disque des deux croissants blancs, dont on a calculé l'aire dans la question 5) b) du croissant « perpendiculaire ».

Chaque croissant a pour aire R^2, donc l'aire cherchée est $\pi R^2 - 2 \times R^2 = \boxed{(\pi - 2) R^2}$.

On peut aussi remarquer que la surface grisée est composée de deux lunules de même aire, qui peut être calculée comme la différence de l'aire d'un secteur circulaire et de celle d'un triangle rectangle.

Sa proportion par rapport à l'aire du disque est $\dfrac{(\pi - 2) R^2}{\pi R^2} = 1 - \dfrac{2}{\pi} \approx 36\,\%$

b) **La rosace à trois branches**



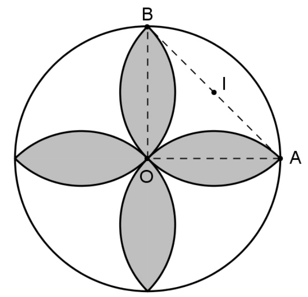
Pour construire cette rosace, on trace un triangle équilatéral (ACD) inscrit dans le grand disque, et on trace des arcs de cercle de centres ces trois points et passant par O, centre du grand cercle.

La surface grisée est composée de trois branches (ou feuilles), chacun constitué de deux lunules de même aire, lunule qui apparaît dans la question 5) a) du croissant passant par le centre. Chaque lunule a pour aire celle du secteur circulaire $\left(A\widehat{O}\widehat{B}A\right)$, d'angle 60°, ôtée de celle du triangle équilatéral (OAB).

On a donc $\left(\dfrac{60}{360}\pi R^2\right) - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} R^2\right) = \left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2$. Les trois branches ont donc pour aire 6 fois l'aire citée, donc

$6\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2 = \boxed{\left(\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) R^2}$. Sa proportion par rapport à l'aire du disque est $\dfrac{\left(\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) R^2}{\pi R^2} = 1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 17\,\%$.

c) **La rosace à quatre branches**



Pour construire cette rosace, on trace un carré inscrit dans le grand disque, et on trace les milieux des côtés de ce carré. On trace alors des arcs de cercle de centres ces quatre points et passant par O, centre du grand cercle.

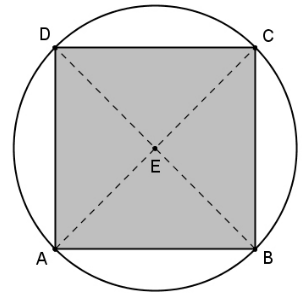
La surface grisée est composée de quatre branches, chacun constitué de deux lunules de même aire. L'aire du triangle rectangle (OAB) a déjà été calculée à la question 4)a) de la lunule à ange droit, et vaut $\dfrac{1}{2} R^2$. Le demi-disque $\left(A\widehat{B}\widehat{O}A\right)$ a pour rayon

$\dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} R$, et donc pour aire $\dfrac{\pi}{2} \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} R\right)^2 = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{2}{4} R^2 = \dfrac{\pi}{4} R^2$.

Donc $\left(\dfrac{\pi}{4} R^2\right) - \left(\dfrac{R^2}{2}\right) = \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right) R^2$ représente l'aire de deux lunules. Comme il y a quatre branches, donc huit lunules, l'aire de la rosace est $4\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right) R^2 = \boxed{(\pi - 2) R^2}$, donc la même aire que celle de « l'œil de chat ».

Sa proportion par rapport à l'aire du disque est $\dfrac{(\pi - 2) R^2}{\pi R^2} = 1 - \dfrac{2}{\pi} \approx 36\,\%$.

d) **Un carré inscrit dans un disque de rayon R**

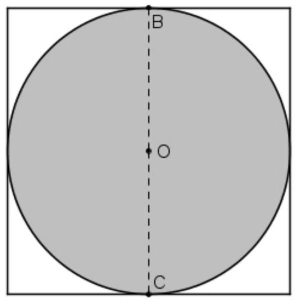


Le disque a pour rayon R et le triangle (ABE) est rectangle isocèle en E, donc $AB = \sqrt{2}\, R$, propriété démontrée à la question 5) b).

Donc l'aire du carré est $AB^2 = \left(\sqrt{2}\, R\right)^2 = \boxed{2 R^2}$.

Sa proportion par rapport à l'aire du disque est $\dfrac{2 R^2}{\pi R^2} = \dfrac{2}{\pi} \approx 64\,\%$.

e) **Un disque inscrit dans un carré de longueur de côté *a***

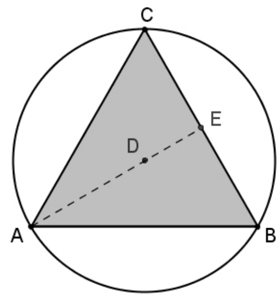


Le disque a pour diamètre a, donc pour rayon $\frac{a}{2}$.

L'aire du disque est donc $\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{\pi}{4}a^2}$.

Sa proportion par rapport au carré est $\dfrac{\frac{\pi}{4}a^2}{a^2} = \frac{\pi}{4} \approx 79\,\%$.

f) **Un triangle équilatéral inscrit dans un disque de rayon *R***



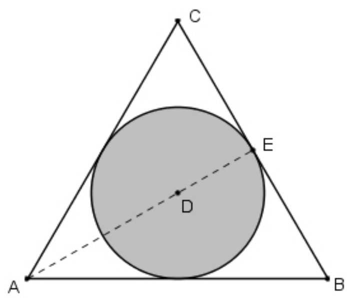
Le segment $[AE]$ est une hauteur du triangle équilatéral (ABC).
Or, dans un triangle équilatéral, les hauteurs sont aussi les médianes.
Et le point D, centre du cercle circonscrit, est aussi le centre de gravité. $AD = R$ et on sait que D se trouve aux deux-tiers de $[AE]$ partant de A. Donc on a : $\frac{2}{3}AE = R$, donc $AE = \frac{3}{2}R$. On sait de plus que $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$, donc $BC = \frac{2}{\sqrt{3}}AE = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2}R = \frac{3}{\sqrt{3}}R$.

Or $3 = \left(\sqrt{3}\right)^2$, donc $BC = \frac{3}{\sqrt{3}}R = \sqrt{3}\,R$.

Le triangle (ABC) a donc pour aire $\frac{1}{2} \times BC \times AE = \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{3}\,R\right) \times \left(\frac{3}{2}R\right) = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2}$.

Sa proportion par rapport à l'aire du disque est $\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2}{\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 41\,\%$.

g) **Un disque inscrit dans un triangle équilatéral de longueur de côté *a***

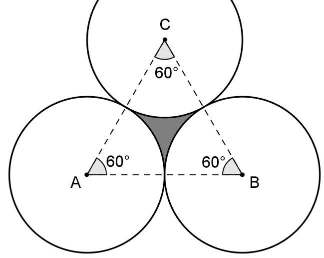


Le segment $[AE]$ est une hauteur du triangle équilatéral (ABC), donc $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

De plus, comme vu dans l'exercice précédent, $DE = \frac{1}{3}AE$, donc le rayon du disque vaut . $\frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}a$. Donc l'aire du disque est $\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 = \pi \times \frac{3}{36}a^2 = \boxed{\frac{\pi}{12}a^2}$.

Comme l'aire du triangle équilatéral est $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, alors la proportion de l'aire du disque est $\dfrac{\frac{\pi}{12}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 60\,\%$.

h) **Surface comprise entre trois cercles de même rayon *R*, tangents extérieurement deux à deux**

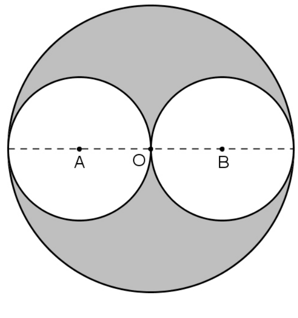


Le triangle (ABC) est équilatéral de longueur de côté $2R$. De plus, lorsque deux cercles sont tangents, la droite joignant leurs centres passe par le point de tangence.
L'aire de la surface cherchée est donc l'aire du triangle (ABC), ôtée des aires des trois secteurs circulaires de rayon R et d'angle de mesure 60°.

L'aire du triangle est $\frac{\sqrt{3}}{4}(2R)^2 = \frac{\sqrt{3} \times 4R^2}{4} = \sqrt{3}\,R^2$, et chaque secteur a pour aire $\frac{60}{360}\pi R^2 = \frac{\pi}{6}R^2$, donc l'aire cherchée est $\left(\sqrt{3}\,R^2\right) - 3 \times \left(\frac{\pi}{6}R^2\right) = \boxed{\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)R^2}$.

La proportion de cette aire par rapport à celle d'un disque est $\dfrac{\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)R^2}{\pi R^2} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{2} \approx 5\,\%$.

i) **Surface comprise entre trois cercles, dont deux ont même rayon *R* et sont tangents extérieurement, et tangents intérieurement à un troisième cercle, de rayon 2*R***

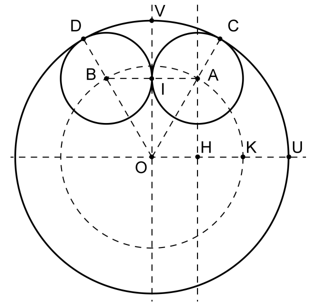


Les hypothèses obligent le grand disque à avoir pour centre le point de tangence des deux petits disques.

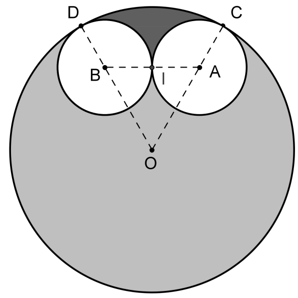
Le grand disque a pour aire $\pi(2R)^2 = 4\pi R^2$, et chaque petit disque a pour aire πR^2, donc l'aire cherchée vaut $\left(4\pi R^2\right) - 2\times\left(\pi R^2\right) = \boxed{2\pi R^2}$.

La proportion de cette aire par rapport à celle du grand disque est $\dfrac{2\pi R^2}{4\pi R^2} = \dfrac{1}{2} = 50\,\%$.

j) **Même cas que précédemment avec un grand cercle de rayon 3*R***



Commençons par expliquer la construction des deux petits disques dans le grand : Traçons un diamètre [*OV*], et (*OU*) sa perpendiculaire en *O*. Les deux petits disques vont être symétriques par rapport à ce diamètre et tangents en *I*. On doit avoir *IA* = *R*, donc on trace la parallèle à (*OV*) telle que *H* est sur (*OU*) et *OH* = *R*. De plus, si on note *C* le point de tangence d'un petit disque avec le grand disque, alors *OC* = 3*R* et *AC* = *R*, donc *OA* = 2*R*. On trace alors le cercle de centre *O* et de rayon 2*R*. On construit ainsi le centre *A* d'un des deux petits cercles comme l'une des intersections de la droite et du cercle. *B* est obtenu par symétrie par rapport à (*OV*).



Le triangle (*OAB*) est équilatéral puisque *OA* = *OB* = *AB* = 2*R*. Donc $A\hat{O}B = 60°$.

Le secteur circulaire $\left(O\overset{\frown}{C}\overset{\frown}{D}O\right)$ a donc pour aire $\dfrac{60}{360}\pi(3R)^2 = \dfrac{\pi}{6}\times 9R^2 = \dfrac{3\pi}{2}R^2$.

D'autre part, le triangle équilatéral (*OAB*) a pour aire $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(2R)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 4R^2 = \sqrt{3}\,R^2$.

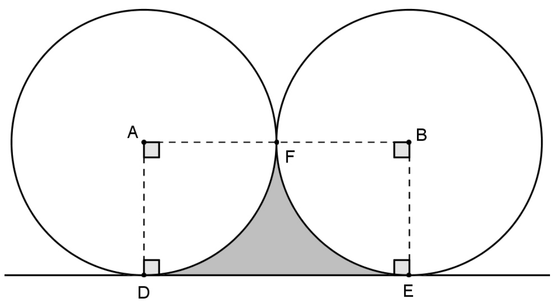
De plus, l'angle $C\hat{A}I$ est supplémentaire de $O\hat{A}I$, donc mesure 180 – 60 = 120°, donc le secteur circulaire $\left(A\overset{\frown}{C}\overset{\frown}{I}A\right)$ a pour aire $\dfrac{120}{360}\pi R^2 = \dfrac{\pi}{3}R^2$.

Donc, l'aire de la surface gris foncé est $\left(\dfrac{3\pi}{2}R^2\right) - \left(\sqrt{3}\,R^2\right) - 2\times\left(\dfrac{\pi}{3}R^2\right) = \boxed{\left(\dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)R^2}$. L'aire de la surface gris clair est $\left(\pi(3R)^2\right) - 2\times\left(\pi R^2\right) - \left(\left(\dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)R^2\right) = \left(9\pi - 2\pi - \dfrac{5\pi}{6} + \sqrt{3}\right)R^2 = \boxed{\left(\dfrac{37\pi}{6} + \sqrt{3}\right)R^2}$.

La proportion de l'aire de la surface gris foncé par rapport à celle du grand disque est $\dfrac{\left(\dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)R^2}{9\pi R^2} = \dfrac{5}{54} - \dfrac{\sqrt{3}}{9\pi} \approx 3\,\%$

et, pour la surface gris clair, on a : $\dfrac{\left(\dfrac{37\pi}{6} + \sqrt{3}\right)R^2}{9\pi R^2} = \dfrac{37}{54} + \dfrac{\sqrt{3}}{9\pi} \approx 75\,\%$.

k) **Surface comprise entre deux cercles de même rayon *R*, tangents extérieurement, et une droite tangente aux deux cercles parallèlement à l'axe des centres des cercles**

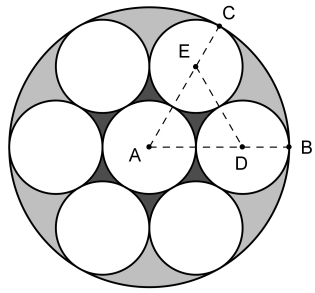


Le rectangle (*ABED*) a pour longueur 2*R* et pour largeur *R*, donc son aire est $2\,R^2$. Le secteur circulaire $\left(A\overset{\frown}{D}\overset{\frown}{F}A\right)$ est un quart de disque de rayon *R*, donc d'aire $\dfrac{\pi}{4}R^2$.

Donc l'aire cherchée vaut $\left(2\,R^2\right) - 2\times\left(\dfrac{\pi}{4}R^2\right) = \boxed{\left(2 - \dfrac{\pi}{2}\right)R^2}$.

La proportion de cette aire par rapport à celle d'un des disques est $\dfrac{\left(2 - \dfrac{\pi}{2}\right)R^2}{\pi R^2} = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{1}{2} \approx 14\,\%$.

l) **Interstices intérieurs et interstices de bordure d'un « barillet », composé d'un cercle de rayon 6*R*, contenant sept cercles de même rayon *R*, dont l'un a même centre que le grand cercle, et les six autres sont tous tangents extérieurement au cercle central, tous tangents intérieurement au grand cercle, et enfin tangents extérieurement à deux de ces six cercles**



La construction des disques de bordures peut se faire grâce à la méthode vue à l'exercice 6) j), puisque le grand disque a un rayon triple des petits disques.

L'aire des interstices de bordure a été calculée au même endroit et vaut $\boxed{\left(\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}\right)R^2}$.

L'aire des interstices intérieurs a aussi déjà été calculée, dans l'exercice 6) h), et vaut $\boxed{\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)R^2}$.

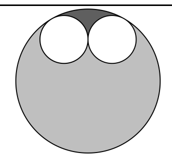
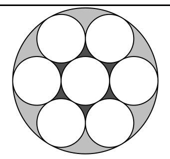
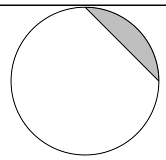
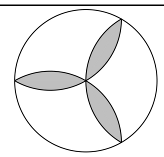
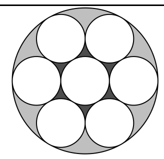
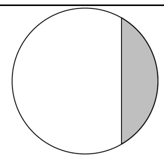
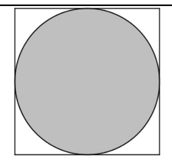
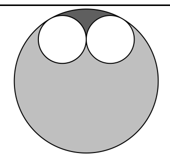
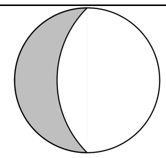
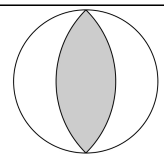
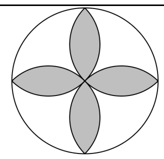
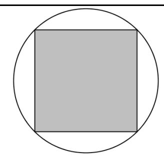
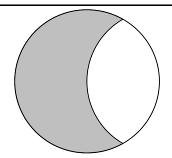
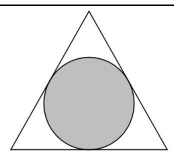
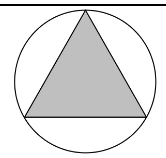
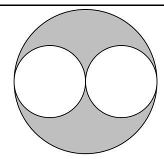
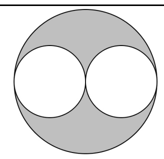
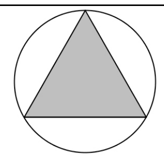
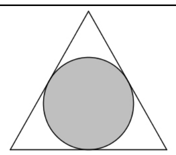
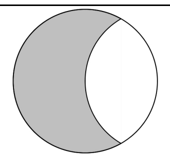
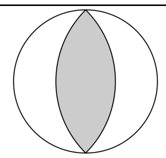
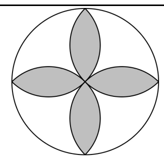
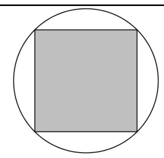
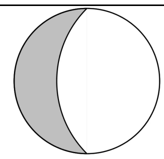
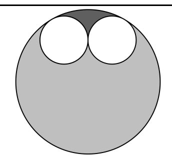
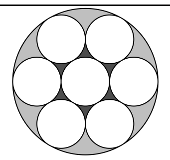
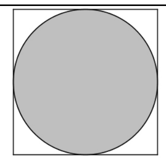
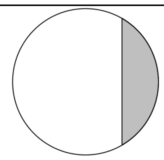
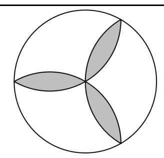
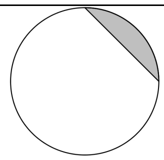
On peut vérifier qu'on a bien : $6\times\left(\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}\right)R^2+6\times\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)R^2+7\times\pi R^2=9\pi R^2$, aire du grand disque.

Les interstices intérieurs représentent $\dfrac{6\times\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)R^2}{9\pi R^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3\pi}-\dfrac{1}{3}\approx 3\,\%$ du grand disque.

Les interstices de bordure représentent $\dfrac{6\times\left(\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}\right)R^2}{9\pi R^2}=\dfrac{5}{9}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3\pi}\approx 19\,\%$ du grand disque.

Et les disques intérieurs représentent $\dfrac{7\times\pi R^2}{9\pi R^2}=\dfrac{7}{9}\approx 78\,\%$ du grand disque.

8) Résumé : Pourcentages de remplissage par ordre croissant *(arrondis à l'entier)*

 3 (*gris foncé*)	 3 (*gris foncé*)	 9 (*gris*)	 17 (*gris*)	 19 (*gris clair*)	 20 (*gris*)
 21 (*blanc*)	 22 (*blanc*)	 32 (*gris*)	 36 (*gris*)	 36 (*gris*)	 36 (*blanc*)
 39 (*blanc*)	 40 (*blanc*)	 41 (*gris*)	 50 (*gris*)	 50 (*blanc*)	 59 (*blanc*)
 60 (*gris*)	 61 (*gris*)	 64 (*blanc*)	 64 (*blanc*)	 64 (*gris*)	 68 (*blanc*)
 75 (*gris clair*)	 78 (*blanc*)	 79 (*gris*)	 80 (*blanc*)	 83 (*blanc*)	 91 (*blanc*)