# *QUELQUES NOMBRES CÉLÈBRES :* $\sqrt{2}$, $\phi$, $\pi$ et $e$

*« Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk. »*

*[Dieu fit les nombres naturels, l'homme a fait le reste.]*

**Kronecker**[1]

------------

*« Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlischen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. »*

*[Les nombres sont la libre création de l'esprit humain : ils servent à appréhender plus facilement et avec plus de précision la diversité des choses.]*

**Dedekind**[2]

## I) Le Nombre de Pythagore : $\sqrt{2}$

## ≈ 1,41421 35623 73095 04880 16887 24209

Historiquement, c'est le premier nombre connue en tant qu'irrationnel.

Le philosophe Proclos[3] révéla dans une citation l'impression faite sur les Pythagoriciens la découverte de l'irrationnel :

« *L'homme qui, le premier, fit sortir du mystère la considération de l'Irrationnel pour la livrer au grand jour de la publicité périt, dit-on, dans un naufrage. Ceci est arrivé parce que l'Inexprimable, l'Informel, aurait dû toujours resté caché…* »

Décomposition de $\sqrt{2}$ en base sexagésimale :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} + \cdots$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \text{, noté } 1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots$$

*1572 : Rafaele Bombelli, italien, 1526 – 1573*

## II) Le Nombre d'Or : $\phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

## ≈ 1,61803 39887 49894 84820 45868 34365

Proportion géométrique, également appelée *proportion divine* ou *dorée*, couramment utilisée en peinture et en architecture pour ses qualités esthétiques.

Le nombre d'or correspond à une proportion selon laquelle le rapport existant entre la plus grande partie d'un segment coupé en deux et la plus petite de ces parties est équivalent à celui existant entre le segment entier et la plus grande des parties.

On le calcule de la façon suivante : soit le segment [*AB*], coupé de manière que le rapport entre *AC* et *CB* soit le même que celui existant entre *AB* et *AC*.


Si $CB = 1$, et si $AC = x$, alors $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AB}{AC}$ est équivalent à $\dfrac{x}{1} = \dfrac{x+1}{x}$. Si l'on multiplie chaque terme de l'équation par $x$, on obtient $x^2 = x + 1$, donc :

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Cette équation peut être résolue en utilisant la formule quadratique qui permet d'obtenir la solution

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Les propriétés du nombre d'or auraient permis aux disciples de Pythagore[4] de découvrir les segments incommensurables, équivalents géométriques des nombres irrationnels ; Euclide[5] quant à lui le définit clairement dans son œuvre principale, *les Éléments de géométrie* (III$^{e}$ siècle av. J.-C.).

*La Divine Proportion (De Divina Proportione),* premier traité à s'intéresser véritablement au sujet, fut rédigé en 1509 par Pacioli[6], grand mathématicien de la Renaissance. L'ouvrage, illustré par de Vinci[7], influença durablement les artistes et les architectes de l'époque, parmi lesquels della Francesca[8] et Alberti[9].

Au début du XX$^{e}$ siècle, les artistes peintres de la Section d'or (Léger[10], Kupka[11], Duchamp[12] et surtout son frère, Jacques Villon[13]) ont montré de l'intérêt pour cette équation singulière, susceptible de leur ouvrir cette « porte d'harmonie » dont rêvait Pacioli. De nombreuses expériences ont, il est vrai, prouvé que la perception humaine montre une préférence naturelle pour les proportions qui s'accordent au nombre d'or. Cela implique en retour que les artistes sont capables de manière presque inconsciente de mettre en place les éléments d'une œuvre suivant cette règle.

La suite de Fibonacci[14] est définie par :

$u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

---

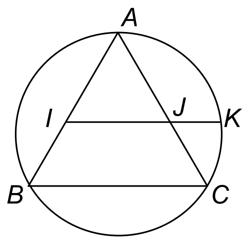
[1] Leopold Kronecker, allemand, 1823–1891
[2] Richard Dedekind, allemand, 1831–1916
[3] Proclos Didachos, grec, 412–437
[4] Pythagore de Samos, grec, 569 av. J.C. –475 av. J.C.
[5] Euclide d'Alexandrie, grec, 325 av. J.C. –265 av. J.C.
[6] Luca Pacioli, italien, 1445–1517
[7] Leonardo da Vinci, italien, 1452–1519
[8] Piero della Francesca, italien, 1412–1492
[9] Leone Battista Alberti, italien, 1404–1472
[10] Fernand Léger, français, 1881–1955
[11] František Kupka, tchèque, 1871–1957
[12] Marcel Duchamp, français, 1887–1968
[13] Jacques Villon, né Gaston Duchamp, français, 1875–1963
[14] Leonardo Pisano, dit Fibonacci, italien, 1170–1250

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}} = 1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots$$

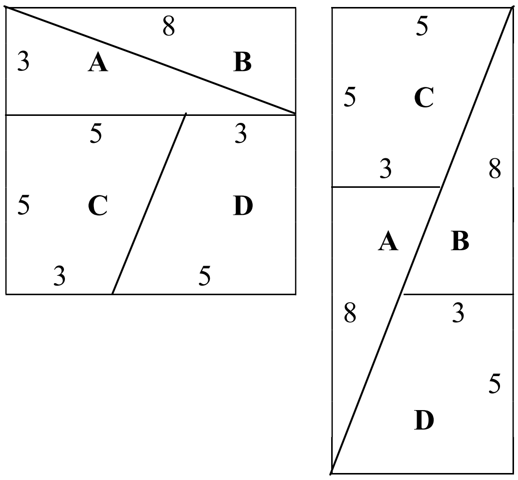
$\phi^n = a_n\phi + b_n$, où $a$ et $b$ sont deux suites extraites de la suite de Fibonacci.

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\cdots}}}}}$$

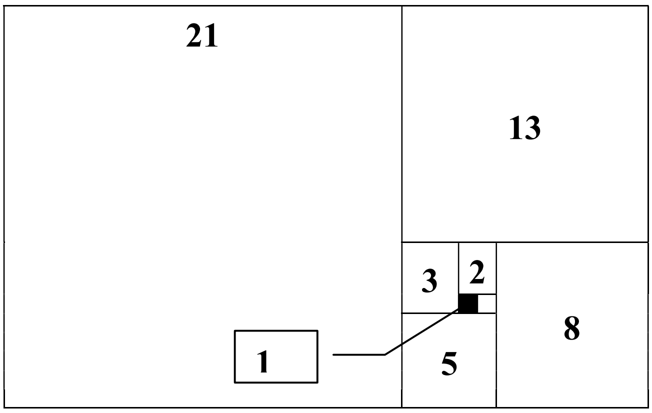
Dans le triangle équilatéral ($ABC$), la droite passant par les milieux $I$ et $J$ respectivement de $[AB]$ et de $[AC]$ coupe le plus petit des arcs de cercle $AC$ en $K$. Montrer que $\frac{IK}{IJ} = \frac{IJ}{JK}$ et déterminer cette valeur commune.




**Chercher et trouver l'erreur !**




**Utilisation de la suite de Fibonacci**




## III) Le Nombre d'Archimède : $\pi$

## $\approx$ 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279

Nom de la seizième lettre de l'alphabet grec, désignant en mathématiques le nombre réel correspondant au rapport de la circonférence du cercle à la longueur de son diamètre. Dans la pratique courante, on utilise généralement la valeur approchée par défaut de $\pi$ égale à 3,14.

### Outil de géométrie et d'analyse

Le nombre $\pi$ résume une histoire des mathématiques vieille de trois mille ans, recouvrant aussi bien la géométrie que l'analyse ou l'algèbre.

Les mathématiciens s'y intéressèrent dès l'Antiquité, et en particulier les Grecs dans des problèmes de géométrie. En considérant des polygones réguliers inscrits et circonscrits dans un cercle, Archimède[(15)] en détermina une valeur assez précise, l'estimant compris entre $3 + \frac{10}{71}$ et $3 + \frac{10}{70}$. Il fallut attendre la naissance du calcul infinitésimal, dans la seconde moitié du XVII$^e$ siècle, pour que le nombre $\pi$ intervienne dans l'étude des séries. Ainsi, Leibniz[(16)] découvrit la formule :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

### Transcendance et irrationalité

À partir du XVIII$^e$ siècle, on se pencha de plus près sur les caractéristiques du nombre $\pi$. En 1761, Lambert[(17)] montre que $\pi$ est irrationnel, propriété redémontrée en 1766 par Legendre[(18)]. Puis en 1882, Lindemann[(19)] établit sa *transcendance,* c'est-à-dire que $\pi$ n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers. Ce résultat permit de démontrer enfin l'impossibilité de la quadrature du cercle, problème qui occupa les mathématiciens pendant plus de deux mille ans, consistant à déterminer un carré dont l'aire soit égale à celle d'un cercle donné.

### Recherches actuelles

Aujourd'hui, on constate que le nombre $\pi$ intervient dans presque tous les domaines des mathématiques (trigonométrie, nombres complexes, exponentielles, statistiques, etc.), mais également en physique, en astronomie, etc. Bien que l'on puisse maintenant calculer $\pi$ à des millions de décimales près à l'aide de supercalculateurs, les recherches sur ce nombre ne sont pas encore terminées : par exemple, on ne sait pas si les décimales de $\pi$ sont aléatoires.

« *Et il fit une mer de fonte, mesurant dix coudées d'un bord à l'autre ; elle était circulaire (…) et une ligne de trente coudées en faisait le tour.* »
**La Bible, Livre des Rois, Chapitre 7, verset 23**

---

(15) Archimède de Syracuse, grec, 287 av. J.C.–212 av. J.C.
(16) Gottfried Wilhelm von Leibniz, allemand, 1646–1716
(17) Johann Heinrich Lambert, suisse, 1728–1777
(18) Adrien Marie Legendre, français, 1752–1833
(19) Ferdinand von Lindemann, allemand, 1852–1939

Le nombre π, quotient du périmètre de tout cercle et de son diamètre, est apparu très tôt dans l'Histoire.

Il est appelé parfois <u>*Constante d'Archimède*</u> et aussi <u>*Constante de Ludolph*</u>, du nom de Ludolph von Ceulen[20] qui, en 1615, en obtint 34 décimales exactes.

Il apparaît inscrit sur le temple de Salomon, construit en 950 av. J.-C., avec comme valeur 3.

La Bible, citant le bassin de la cour du temple de ce roi (« la mer de fonte » citée plus haut) le nomme aussi avec cette valeur approchée.

La lettre π apparaît pour la première fois en 1663 dans un livre de Oughtred[21]. Cette lettre est la première du mot grec περιφερεια [*périphéria*], qui signifie circonférence.

Euler[22] systématisa dès 1737 l'emploi de ce symbole.

Ensuite, les savants ont recherché des formules permettant de l'approcher :

Deux grandes méthodes sont apparues :

- Comparaison entre le périmètre (ou l'aire) d'un disque et de polygones réguliers ayant un nombre de côtés de plus en plus grands.
- Recherche de suites convergeant vers π avec une vitesse de convergence de plus en plus grande.

| Dates | Formules | Valeurs | Découvreurs |
|---|---|---|---|
| −2000 | $\dfrac{25}{8}$ | 3,125[a] | Égyptiens & Babyloniens |
| −1650 | $\left(\dfrac{16}{9}\right)^2$ | 3,16[b] | Papyrus Rhind (Égypte) |
| −500 | $\left(\dfrac{26}{15}\right)^2$ | 3,0044 | Traité indien Sulbasutras |
| −400 | $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ | 3,14626 | Platon *(grec, 427 av. J.C. – 348 av. J.C.)* |
| −250 | $\dfrac{223}{71} < \pi < \dfrac{22}{7}$ | 3,1408 < π < 3,1428 [c] | Archimède |
| 100 | $\sqrt{10}$ | 3,162 | Zhang Heng *(chinois, 78–139)* |
| 150 | $\dfrac{377}{120}$ | 3,1416[d] | Claude Ptolémée *(grec, 85–165)* |
| 250 | $\dfrac{142}{45}$ | 3,155 | Wan Fan *(chinois)* |
| 263 | $\dfrac{157}{50}$ | 3,14 | Lui Hui *(chinois)* |
| 450 | $\dfrac{355}{113}$ | 3,1415929 | Zu Chong Zhi *(chinois)* |
| 498 | $\dfrac{62832}{20000}$ | 3,1416[e] | Araybhata *(indien, 476–550)* |

[20] Ludolph von Ceulen, allemand, 1540–1610
[21] William Oughtred, anglais, 1574–1660
[22] Leonhard Euler, suisse, 1707–1783

| Dates | Formules | Valeurs | Découvreurs |
|---|---|---|---|
| 600 | $\sqrt{10}$ | 3,162 | Brahmagupta (*indien, 598–670*) |
| 800 | $\dfrac{22}{7}$ | 3,1428 | Al Khwarizmi *(arabe (Irak), 780–850)* |
| 1200 | $\dfrac{864}{275}$ | 3,1418 | Fibonacci |
| 1416 | | 16 déc | Al-Kashi *(arabe (Iran), 1380–1429)* |
| 1450 | $\dfrac{3}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$ | 3,136 | Nicolas de Cuse (*allemand, 1401–1464*) |
| 1500 | $\dfrac{25}{8}$ | 3,125 | Albrecht Dürer (*allemand, 1471–1528*) |
| 1575 | | 17 déc | Adriaan van Roomen *(belge, 1561–1615)* |
| 1592 | | 9 déc | François Viète (*français, 1540–1603*) |
| 1615 | | 34 déc | Ludolph van Ceulen |
| 1625 | $\dfrac{355}{113}$ | 3,1415929 | Adrian Anthonisz |
| 1650 | | 71 déc | James Gregory (*écossais, 1638–1675*) |
| 1699 | | 72 déc | Abraham Sharp *(anglais, 1651–1742)* |
| 1701 | | 100 déc | John Machin *(anglais, 1680–1751)* |
| 1719 | | 127 déc | Fautet de Lagny *(français, 1660–1734)* |
| 1794 | | 136 déc | Georg Von Vega *(slovène, 1754–1802)* |
| 1853 | | 440 déc | Rutherford |
| 1873 | | 527 déc[f] | William Shanks *(anglais, 1812–1882)* |
| 1947 | | 808 déc[f] | D. F. Ferguson & JJ. W. Wrench Jr |
| 1949 | | 2037 déc | Van Neumann |
| 1958 | | 10 000 déc | F. Genuys |
| 1976 | | $10^6$ déc | Guilloud & Bouyer |
| 1982 | | $10^7$ déc | |
| 1989 | | $10^8$ déc | |
| 2002 | | $10^{12}$ déc | |
| … | | … | |

[a] : En fractions de base 60 : $\pi \approx 3 + \dfrac{7}{60} + \dfrac{1}{120}$.

[b] : Assimilation d'un cercle de diamètre $d$ et d'un carré de longueur de côté $\dfrac{8}{9}d$.

[c] : Comparaison du périmètre du polygone à 96 côtés et des périmètres de ses cercles inscrit et circonscrit.

On obtient l'encadrement : $3+\dfrac{10}{71} < \pi < 3+\dfrac{1}{7}$

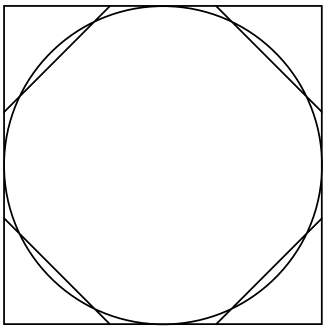
[d] : En fractions de base 60 : $\pi \approx 3 + \dfrac{8}{60} + \dfrac{30}{3600}$.

[e] : Grâce au calcul des périmètres de polygones à 12, 24, 48, 96, 192 et 384 côtés.

Relation récurrente : $a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (a_n)^2}}$ .

[f] : La première formule permettant de calculer « rapidement » un grand nombre de décimales de π est due à Machin (1706), qui permit à Shanks de calculer à la main 707 décimales de π (il fit cependant une erreur à la 529e décimale). Ces 707 décimales ornent depuis 1937 la coupole de la « salle π » du Palais de la découverte. Les décimales erronées furent corrigées en 1947, à la publication de Ferguson.

*Exercices*



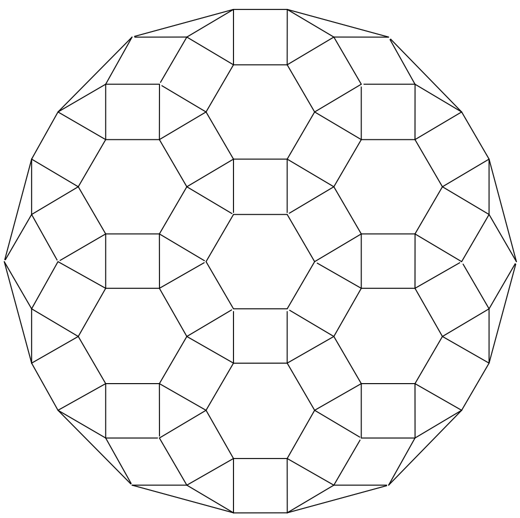
On considère un cercle de diamètre 3 cm et de centre *O*. On trace aussi le carré de centre *O* et de longueur de côté 3 cm. On découpe chaque côté en trois parties égales comme l'indique le dessin ci-dessus. En considérant que l'octogone ainsi construit a une aire « comparable » à celle du disque, déterminer l'approximation de π que l'on a ainsi trouvée.

Le polygone à 18 côtés ci-dessous représente un des motifs appelé « Rosace du temple de Diane », à Nîmes.

Cette figure est constituée d'hexagones réguliers, de carrés, de triangles équilatéraux, de losanges et de triangles isocèles obtusangles. Toutes les figures régulières ont même longueur de côtés.

Montrer que chaque triangle isocèle obtusangle a pour aire le quart de l'aire d'un des carrés.

Si on suppose que les sommets de cette rosace sont sur un même cercle (ce qui est presque le cas), montrer que l'on obtient alors comme approximation de π la valeur 3,12.



On montre que, si *n* est un entier > 1, la suite u définie par $u_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^n}$ converge lorsque p tend vers +∞.

On définit, pour tout entier *n* > 1, la *fonction dzéta de Riemann*[23] ζ par $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$.

(On l'appelle fonction car on peut la définir pour *n* réel > 1 dès qu'on a donné un sens à un exposant réel).

On montre que les images des nombres pairs par cette fonction sont de la forme :

$\zeta(2p) = r_p \times \pi^{2p}$, où $r_p$ est un nombre rationnel.

Quelques exemples :

| | |
|---|---|
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$ | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}$ |

En revanche, aucune formule n'est à ce jour connue pour les images de nombres impairs.

En particulier on ne sait pas grand-chose sur le nombre $\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1{,}2020569\ldots$, appelé *nombre d'Apéry*[24], nom du mathématicien qui montra en 1978 que $\frac{\zeta(3)}{\pi^3}$ n'est pas rationnel, ce qui est l'une des rares propriétés intéressantes trouvées à l'heure actuelle.

Montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ peut aussi s'écrire $\prod_{p \in \mathrm{P}} \left( \frac{p^n}{p^n - 1} \right)$.

Quelques formules :

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ddots}}}}}$$

1600 : Lord Brouncker *(anglais, 1620–1684)*

$$\operatorname{Arc}\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

1670 : James Gregory, 1673 : Gottfried Leibniz

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

1674 : Leibniz

[23] Bernhard Riemann, allemand, 1826–1866

[24] Roger Apéry, français, 1916–1994

| |
|---|
| $$4\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{1}{5}\right)-\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{\pi}{4}$$ 1706 : John Machin |
| $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{2m}{2m-1}\times\frac{2m}{2m+1}\right)=\frac{\pi}{2}$$ 1655 : John Wallis *(anglais, 1616–1703)* |
| $$n\,!\;=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\cdots\right)$$ 1730 : James Stirling *(anglais, 1692–1770)* |
| $$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$ |
| $$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$$ |
| $$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\cdots}$$ François Viète *(français, 1540–1603)* |
| $$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4(396)^{4k}}$$ 1913 : Srinivasa Ramanujan *(indien, 1887–1920)* |
| $$\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{1}{5}\right)+\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{\pi}{4}$$ |
| $\frac{6}{\pi^2}$ est la probabilité pour que deux entiers choisis au hasard soient premiers entre eux, et aussi pour qu'un entier choisi au hasard ne soit pas divisible par un carré (autre que 1, bien sûr !) |
| $$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdots$$ |
| $$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$ |
| $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{\pi-3}{4}$$ |
| $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$ |
| $$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{\ddots}}}}}$$ |
| $$12\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{1}{18}\right)+8\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{1}{57}\right)-5\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{\pi}{4}$$ |

Valeurs approchées de π, découvertes au fil des temps :

$$\sqrt[4]{9^2+\frac{19^2}{22}}=3{,}14159265262...$$

$$\frac{63}{25}\times\frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}}=3{,}141592654...$$

$$\frac{99^2}{1103\times2\sqrt{2}}=3{,}14159273...$$

Procédés mnémotechniques

pour les premières décimales de π :

| 3, | 1 | 4 | 1 | 5 | 9 | 2 | 6 | 5 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Que | j' | aime | à | faire | apprendre | un | nombre | utile | aux | sages |
| How | I | wish | I | could | recollect | of | circle | round | | |
| Dir, | o | Held, | o | alter | Philosoph, | du | Riesen | Genie | | |

## IV) La constante d'Euler : le nombre *e* ≈ 2,71828 18284 59045 23536 02874 71352

En 1872, Hermite[25] prouve que *e* est transcendant.

| |
|---|
| $$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}}}}}}}$$ Donc $$e=2+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\cdots\frac{1}{2n+}\cdots$$ |
| $$e^{i\pi}=-1$$ |
| $$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}$$ |
| $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$ |

[25] Charles Hermite, français, 1822–1901